M25 ACADEMIA

PAU 2026
Comunidad de Madrid
Academia M25

Hazlo Fácil Hazlo M25

Hecho con mucho ❤️ por el equipo de Academia M25

Los exámenes que presentamos han sido elaborados por los profesionales de Academia M25 con fines exclusivamente orientativos y educativos.

Este material tiene como objetivo mostrar la estructura y el tipo de ejercicios que pueden encontrarse en la PAU 2026 en Madrid, ayudando al estudiante a familiarizarse con el formato del examen y a prepararse con confianza.

El temario oficial es amplio y puede variar según las actualizaciones y directrices publicadas por la Comisión Organizadora de la PAU de la Comunidad de Madrid. Recomendamos consultar regularmente las fuentes oficiales y complementar la preparación mediante estudio continuo y práctica constante.

En Academia M25 ofrecemos cursos anuales, extensivos e intensivos adaptados a la PAU 2026, para que llegues a los exámenes de junio con todas las garantías.

Matemáticas II

EXAMEN OFICIAL · MADRID · CONVOCATORIA ORDINARIA 2025/2026

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a cinco preguntas, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Responda a las tres preguntas siguientes (calificación máxima por pregunta: 2 puntos):

Pregunta 1. Dada la matriz real $\begin{pmatrix} 1 & \lambda-2, & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda-1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Discutir el rango de A en función del parámetro λ.

Estudiamos el rango calculando el determinante de A. Lo desarrollamos por la primera columna:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda-2 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda-1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & \lambda-1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} \lambda-2 & \lambda \\ 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1 + [(\lambda-2)(\lambda-1)-\lambda] = 1+\lambda^2-4\lambda+2 = \lambda^2-4\lambda+3 = (\lambda-1)(\lambda-3)$$

El determinante se anula en $\lambda = 1$ y $\lambda = 3$. Distinguimos casos:

Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 3$: $|A| \neq 0$, luego

$$\mathrm{rg}(A) = 3$$

b) (1 punto) Para el caso λ = 2, resolver la ecuación matricial A² - AX = I, donde I es la matriz identidad de orden 3.

Para $\lambda = 2$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $|A| = (2-1)(2-3) = -1 \neq 0$, así que A es invertible.

Despejamos X de $A^2 - AX = I$. Sacamos factor común A por la izquierda (¡ojo al orden, las matrices no conmutan!):

$$A^2 - AX = I \Longrightarrow AX = A^2 - I \Longrightarrow X = A^{-1}(A^2 - I) = A - A^{-1}.$$

Calculamos la inversa por adjuntos (recordando $A^{-1} = \frac{(\mathrm{adj}A)^T}{|A|}$, con $|A| = -1$):

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

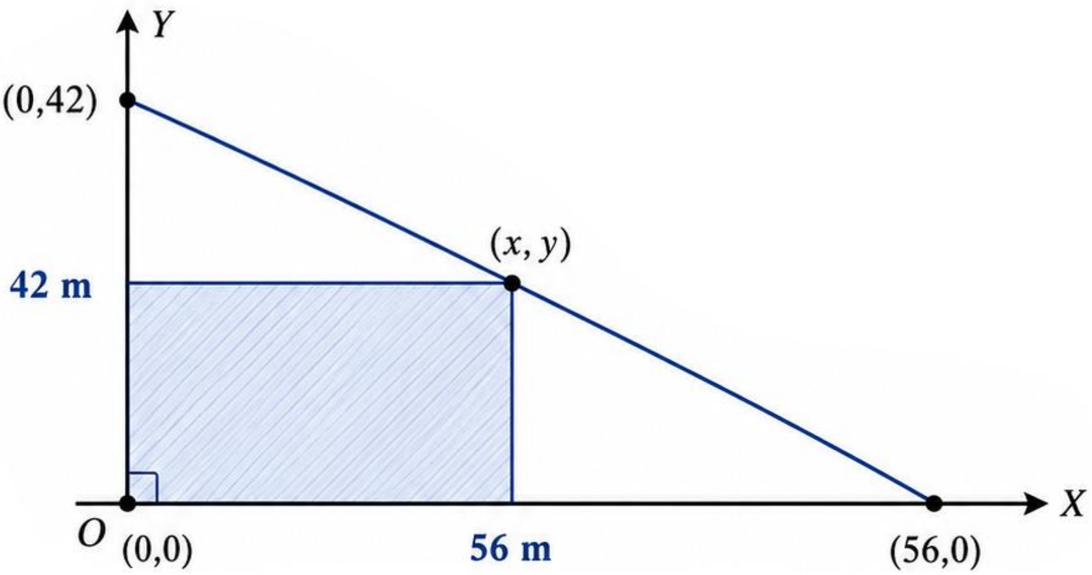
Por tanto:

$$X = A - A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Pregunta 2. (2 puntos) Se quiere enlosar un jardín con forma de triángulo rectángulo de catetos 42 m y 56 m. Dentro del jardín se va a diferenciar un espacio rectangular techado de forma que dos de sus lados sean paralelos a los catetos del triángulo, un vértice coincida con el vértice del ángulo recto del triángulo y el vértice opuesto esté sobre su hipotenusa.

Alicatar la parte cubierta cuesta 30 €/m² y la parte no techada, 50 €/m² pues las baldosas llevan un tratamiento especial resistente al agua. Calcule las dimensiones de la parte techada que hacen que el coste de instalar el suelo en el jardín sea mínimo.



La hipotenusa une $(56,0)$ con $(0,42)$, así que su recta es $\frac{x}{56} + \frac{y}{42} = 1$, de donde

$$y = 42 - \frac{3}{4}x.$$

El área total del jardín es $1/2 \cdot 42 \cdot 56 = 1176$ m^2. Si la parte techada mide $x \cdot y$, la parte sin techar es $1176 - xy$. El coste de alicatar:

$$C = 30(xy) + 50(1176 - xy) = 58800 - 20xy.$$

Minimizar el coste equivale a *maximizar* el área techada. Sustituyendo y obtenemos el coste en función de una sola variable:

$$C(x) = 58800 - 20x\left(42 - \frac{3}{4}x\right) = 15x^2 - 840x + 58800.$$

Derivamos e igualamos a cero:

$$C'(x) = 30x - 840 = 0 \Longrightarrow x = 28.$$

Como $C''(x) = 30 > 0$, es un mínimo (justo lo que buscamos). La otra dimensión:

$$y = 42 - \frac{3}{4} \cdot 28 = 21.$$

La parte techada mide 28 m $\times$ 21 m

Pregunta 3. Dados el plano π: 2x + 2y - z = 13 y la recta

$$r: \frac{(x\ -\ 2)}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$$

a) (1 punto) Halle el punto simétrico del punto P(2, 0, 0) respecto al plano π.

Para hallar el simétrico de $P(2,0,0)$ respecto de π, trazamos la recta perpendicular a π que pasa por P (su director es la normal $\vec{n}$):

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases}$$

La cortamos con el plano para hallar el punto medio M (la proyección de P):

$$2(2+2t)+2(2t)-(-t)=13 \Longrightarrow 4+9t=13 \Longrightarrow t=1 \Longrightarrow M=(4,2,-1).$$

Como M es el punto medio de P y su simétrico P', despejamos $P'=2M-P$:

$$P'=(6,4,-2)$$

b) (1 punto) Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:

b1) Halle la distancia entre el plano π y la recta r.

Primero estudiamos la posición relativa de la recta y el plano haciendo uso del vector director de la recta y elv ector normal del plano, calculamos su producto escalar:

$$\vec{d}\cdot\vec{n}=(1,1,4)\cdot(2,2,-1)=2+2-4=0.$$

Al ser 0, la recta es paralela al plano. Y como su punto $P_r(2,0,0)$ no cumple la ecuación $(2\cdot 2+2\cdot 0-0=4\neq 13)$, no está contenida. La distancia recta–plano es la del punto al plano:

$$d(r,\pi)=\frac{|2\cdot 2+2\cdot 0-0-13|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{|-9|}{3}=\boxed{3\text{ u.}}$$

b2) Halle una ecuación del plano que contiene a la recta r y es ortogonal al plano π.

Este plano debe contener el director de la recta $\vec{d}=(1,1,4)$ y, por ser perpendicular a π, también la normal $\vec{n}=(2,2,-1)$. Su vector normal es el producto vectorial de ambos:

$$\overrightarrow{n'}=\vec{d}\times\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 4\\ 2 & 2 & -1\end{vmatrix}=(-9,9,0) \text{ o lo que es lo mismo: } (1,-1,0).$$

Imponemos que pase por $P_r(2,0,0)$:

$$1(x-2)-1(y-0)+0(z-0)=0 \Longrightarrow \boxed{x-y-2=0.}$$

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos):

Pregunta 4.1. El proveedor de una fábrica de móviles proporciona baterías cuya duración sigue una distribución normal con media μ = 24 horas y desviación típica σ = 3 horas. A efectos de control de calidad, se considera que una batería es defectuosa si su duración es inferior a 21 horas.

a) (1 punto) Se elige un teléfono al azar de la línea de producción. Calcule la probabilidad de que su batería sea considerada defectuosa.

Tipificamos para usar la tabla de la $N(0,1)$:

$$P(X<21)=P\left(Z<\frac{21-24}{3}\right)=P(Z<-1)=1-P(Z<1)=1-0{,}8413.$$

$$P(\text{defectuosa})=0{,}1587 \quad (15{,}87\,\%)$$

b) (1 punto) Un distribuidor recibe un lote de 10 teléfonos. Suponiendo independencia entre ellos, ¿cuál es la probabilidad de que en ese lote haya al menos 9 teléfonos con la batería no defectuosa?

$$P(Y\geq 9)=P(Y=9)+P(Y=10)=\binom{10}{9}p^9(1-p)+\binom{10}{10}p^{10}.$$

$$P(Y\geq 9)=10(0{,}8413)^9(0{,}1587)+(0{,}8413)^{10}\approx 0{,}3353+0{,}1776.$$

$$P(Y\geq 9)\approx 0{,}5130 \quad (51{,}3\,\%)$$

Pregunta 4.2. Sabiendo que P(B) = 0,4, P($\overline{A \cup B}$) = 0,4 y P(B|A) = 0,2, calcule las siguientes probabilidades:

a) (1 punto) P(Ā) y P(A∩B).

De la probabilidad condicionada: $P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0{,}2$, es decir $P(A \cap B) = 0{,}2\, P(A)$.

Sustituimos en la fórmula de la unión:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow 0{,}6 = P(A) + 0{,}4 - 0{,}2P(A).$$

$$0{,}8\, P(A) = 0{,}2 \Longrightarrow P(A) = 0{,}25.$$

Con esto:

$$P(\bar{A}) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75, \qquad P(A \cap B) = 0{,}2 \cdot 0{,}25 = 0{,}05.$$

$$P(\bar{A}) = 0{,}75, \qquad P(A \cap B) = 0{,}05$$

b) (1 punto) P((A∩B) | (A∪B)).

Como $A \cap B$ está contenido en $A \cup B$, se tiene $(A \cap B) \cap (A \cup B) = A \cap B$, luego:

$$P\big((A \cap B) \mid (A \cup B)\big) = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{0{,}05}{0{,}6} = \frac{1}{12}.$$

$$P\big((A \cap B) \mid (A \cup B)\big) = \frac{1}{12} \approx 0{,}0833$$

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos):

Pregunta 5.1. (2 puntos) Sea f(x) = ln(x). Halle el área de la región acotada por la gráfica de f(x), el eje de abscisas y la recta x = e.

Queremos el área del recinto limitado por $f(x) = \ln x$, el eje de abscisas y la recta $x = e$. La curva corta al eje X donde $\ln x = 0$, es decir en $x = 1$, y entre $x = 1$ y $x = e$ la función es positiva. El recinto cerrado es, por tanto, el comprendido entre $x = 1$ y $x = e$:

$$A = \int_1^e \ln x \, dx.$$

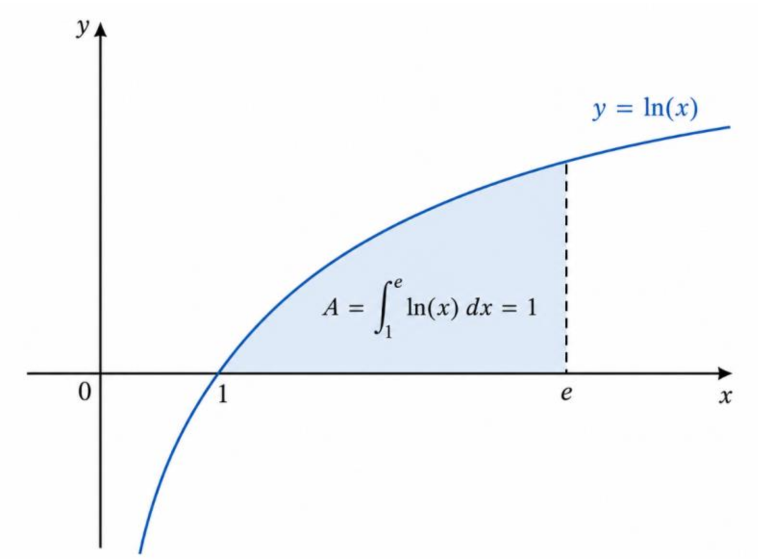
Resolvemos por partes, con $u = \ln x \Rightarrow du = 1/x \ dx$ y $dv = dx \Rightarrow v = x$:

$$\int \ln x \, dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x\ln x - x.$$

Evaluamos entre 1 y e:

$$A = [x\ln x - x]_1^e = (e \cdot 1 - e) - (1 \cdot 0 - 1) = 0 - (-1).$$

$$A = 1 \text{ u}^2$$



Pregunta 5.2. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - sen(ax) + b, & si\ x < 0 \\ \dfrac{2e^x}{1 + x^2}, & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Calcule los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en x = 0.

Continuidad en $x = 0$. El valor y el límite por la derecha valen $f(0) = \frac{2e^0}{1+0} = 2$. El límite por la izquierda es

$$\lim_{x \to 0^-} (3x^2 - \text{sen}(ax) + b) = b.$$

Para que sea continua, $b = 2$.

$$b = 2$$

Derivabilidad en $x = 0$. Derivamos cada tramo:

$$\text{Si } x < 0\text{:}\ \ f'(x) = 6x - a\cos(ax) \Longrightarrow f'(0^-) = -a.$$

$$\text{Si } x > 0\text{:}\ \ f'(x) = \frac{2e^x(1 + x^2) - 2e^x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{2e^x(x - 1)^2}{(1 + x^2)^2} \Longrightarrow f'(0^+) = \frac{2 \cdot 1}{1} = 2.$$

Para que sea derivable, las derivadas laterales coinciden: $-a = 2$.

$$a = -2$$

b) (1 punto) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa x = 2.

Recta tangente en $x = 2$. Como $2 \geq 0$, usamos el tramo $f(x) = \frac{2e^x}{1+x^2}$:

$$f(2) = \frac{2e^2}{1+4} = \frac{2e^2}{5}, \qquad f'(2) = \frac{2e^2(2-1)^2}{(1+4)^2} = \frac{2e^2}{25}.$$

La recta tangente es $y - f(2) = f'(2)(x-2)$:

$$y - \frac{2e^2}{5} = \frac{2e^2}{25}(x-2) \Longrightarrow$$

$$y = \frac{2e^2}{25}(x+3)$$