M25 ACADEMIA

PAU 2026

Comunidad de Madrid
Academia M25

Hazlo Fácil

Hazlo M25

Hecho con mucho ❤️ por el equipo de Academia M25

Los exámenes que presentamos han sido elaborados por los profesionales de Academia M25 con fines exclusivamente orientativos y educativos.

Este material tiene como objetivo mostrar la estructura y el tipo de ejercicios que pueden encontrarse en la PAU 2026 en Madrid, ayudando al estudiante a familiarizarse con el formato del examen y a prepararse con confianza.

El temario oficial es amplio y puede variar según las actualizaciones y directrices publicadas por la Comisión Organizadora de la PAU de la Comunidad de Madrid. Recomendamos consultar regularmente las fuentes oficiales y complementar la preparación mediante estudio continuo y práctica constante.

En Academia M25 ofrecemos cursos anuales, extensivos e intensivos adaptados a la PAU 2026, para que llegues a los exámenes de junio con todas las garantías.

Matemáticas CCSS

EXAMEN OFICIAL · MADRID · CONVOCATORIA ORDINARIA 2025/2026

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 4 preguntas: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección. Todas las respuestas deben ser razonadamente justificadas.

CALIFICACIÓN: cada pregunta se valorará sobre 2,5 puntos.

DURACIÓN: 90 minutos.

Pregunta 1 (2,5 puntos) – Estadística e Inferencia

El barómetro de octubre de 2025 del Centro de Investigaciones Sociológicas (CIS) recoge las entrevistas realizadas a una muestra de 4029 personas. La Pregunta 10R plantea al entrevistado: "¿Cuál es, a su juicio, el principal problema que existe actualmente en España? ¿Y el segundo? ¿Y el tercero?" De los 333 entrevistados entre 18 y 24 años, un 35,5 % menciona la vivienda como alguno de los tres problemas, un 26,7 % la inmigración y un 25,1 % los problemas relacionados con la calidad del empleo.

1.a) (1,5 puntos) Calcule el intervalo de confianza al 95 % para la proporción de jóvenes de 18 a 24 años que consideran la vivienda como uno de los tres principales problemas de España en octubre de 2025.

Datos: $n = 333$, $\hat{p} = 0{,}355$, nivel de confianza 95 %.

Justificación de la aproximación normal: se comprueba que $n\hat{p} = 118.2 \gg 5$ y $n(1-\hat{p}) = 214.8 \gg 5$, por lo que la distribución muestral de $\hat{p}$ se aproxima mediante una normal.

El valor crítico para $\alpha/2 = 0{,}025$ es $z_{\alpha/2} = 1.96$.

La fórmula del intervalo de confianza es:

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

El margen de error vale:

$$E = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}355 \cdot 0{,}645}{333}} = 0.0514$$

Intervalo de confianza al 95 %:

$$\boxed{IC = (0.3036\ ;\ 0.4064) = (30.36\,\%\ ;\ 40.64\,\%)}$$

1.b) (1 punto) Para el barómetro de noviembre se desea volver a estimar la proporción de jóvenes de 18 a 24 años que consideran la vivienda como uno de los tres principales problemas de España. Se quiere que esta estimación tenga un margen de error de cinco puntos porcentuales y un nivel de confianza del 97 %. Calcule el tamaño de muestra necesario asumiendo $\mathbf{p = 0,355}$.

Datos: $e = 0{,}05$, nivel de confianza 97 %, $p = 0{,}355$.

El valor crítico para NC = 97 % es $z_{\alpha/2} = 2.1701$.

La fórmula del tamaño muestral es:

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2 \cdot p(1-p)}{e^2} = \frac{2.1701^2 \cdot 0{,}355 \cdot 0{,}645}{0,05^2} = 431.3241$$

Redondeando al entero superior:

$$\boxed{n_{\min} = 432}$$

Pregunta 2 (2,5 puntos) — Análisis

Responda únicamente a una de las dos opciones.

a) Opción 2.1

Considere la función real de variable real

$$f(x) = x(1-x^2) + e^{-\lambda x}$$

donde λ es un parámetro real sin especificar.

2.1.a) *(1 punto)* Calcule $F(x)$, la primitiva de $f(x)$, tal que $F(0) = 1$.

Reescribimos $f(x) = x - x^3 + e^{-\lambda x}$ e integramos término a término:

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} + C$$

Imponemos $F(0) = 1$:

$$F(0) = 0 - 0 - \frac{1}{\lambda} + C = 1 \Longrightarrow C = 1 + \frac{1}{\lambda}$$

$$\boxed{F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} + 1 + \frac{1}{\lambda}}$$

2.1.b) *(1 punto)* Obtenga el área entre la curva de $f(x)$ y el eje horizontal en el intervalo $[0, 1]$.

En $[0,1]$: $x(1 - x^2) \geq 0$ y $e^{-\lambda x} > 0$, por tanto $f(x) > 0$ en todo el intervalo y el área coincide con la integral definida:

$$A = \int_0^1 f(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda}\right)$$

$$\boxed{A(\lambda) = \frac{1}{4} + \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda}\right)}$$

2.1.c) ***(0,5 puntos)*** **¿Para qué valores de λ es $f'(0)$ positiva?**

$$f'(x) = 1 - 3x^2 - \lambda e^{-\lambda x} \Rightarrow f'(0) = 1 - \lambda$$

$$f'(0) > 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda > 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda < 1}$$

b) Opción 2.2

Sea la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{(x-2)^2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^2 + x^3}{x^2+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

2.2.a) ***(0,5 puntos)*** **Determine razonadamente el dominio de $f(x)$.**

- **Rama $x < 0$:** el denominador $(x-2)^2 = 0$ solo en $x = 2$, que no pertenece a $(-\infty, 0)$. Sin restricción adicional.
- **Rama $x \geq 0$:** el denominador $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ para todo x. Sin restricción.

$$\boxed{\text{Dom}(f) = \mathbb{R}}$$

2.2.b) ***(0,5 puntos)*** **Estudie la continuidad de $f(x)$ en $x = 0$.**

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{0+2}{(0-2)^2} = \frac{2}{4} = 0.5$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = \frac{0+0}{0+1} = 0$$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0.5 \neq 0 = \lim_{x \to 0^+} f(x)$, f no es continua en $x = 0$. Hay una discontinuidad de salto.

2.2.c) *(0,5 puntos)* Calcule la asíntota de $f(x)$ cuando $x \to -\infty$.

El grado del numerador (1) es menor que el del denominador (2):

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{(x-2)^2} = 0$$

$\boxed{\text{Asíntota horizontal: } y = 0}$

2.2.d) *(1 punto)* Calcule la asíntota de $f(x)$ cuando $x \to +\infty$.

El grado del numerador (3) supera al del denominador (2): existe **asíntota oblicua** $y = mx + n$.

Pendiente:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x^3}{x(x^2+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x}{x+1/x} = 1$$

Ordenada en el origen:

$$n = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x^3-x(x^2+1)}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x}{x^2+1} = 1$$

$\boxed{\text{Asíntota oblicua: } y = x + 1}$

Pregunta 3 (2,5 puntos) — Álgebra y Programación Lineal

Responda únicamente a una de las dos opciones.

a) Opción 3.1

Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 3/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

3.1.a) *(1,5 puntos)* Calcule la matriz X en la ecuación matricial $AXB = A + B$.

Premultiplicamos por A^{-1} y postmultiplicamos por B^{-1}:

$$A^{-1}AXB = A^{-1}(A+B)$$

$$XBB^{-1} = A^{-1}(A+B)B^{-1}$$

$$X = A^{-1}(A+B)B^{-1} \quad \text{si } |A| \neq 0 \text{ y } |B| \neq 0$$

Cálculo de determinantes

$$|A| = 1 \neq 0$$

$$|B| = \frac{1}{8} \neq 0$$

Por tanto, ambas matrices son invertibles.

Inversa de A

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \begin{pmatrix} -3/4 & 1 & 1/4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1/4 & 1 & -3/4 \end{pmatrix}$$

Inversa de B

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^t)}{|B|} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Desarrollo de X

$$X = A^{-1}(A+B)B^{-1} = A^{-1}AB^{-1} + A^{-1}BB^{-1}$$

$$X = B^{-1} + A^{-1}$$

Resultado final

$$X = B^{-1} + A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3/4 & 1 & 1/4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1/4 & 1 & -3/4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 1/4 & 1 & 1/4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1 & 13/4 \end{pmatrix}}$$

3.1.b) *(1 punto)* Calcule el determinante $|C^2B|$, siendo $C = 2(A^{-1})^T$. *Nota:* M^T *denota la matriz traspuesta de la matriz* M.

Siendo $C = 2(A^{-1})^T$, usamos las propiedades del determinante ($n = 3$):

$$|C| = |2(A^{-1})^T| = 2^3 \cdot |(A^{-1})^T| = 8 \cdot |A^{-1}| = \frac{8}{\det(A)} = \frac{8}{1} = 8$$

$$|C^2B| = |C|^2 \cdot |B| = 8^2 \cdot 0.125 = 64 \cdot 0.125$$

$$\boxed{|C^2B| = 8}$$

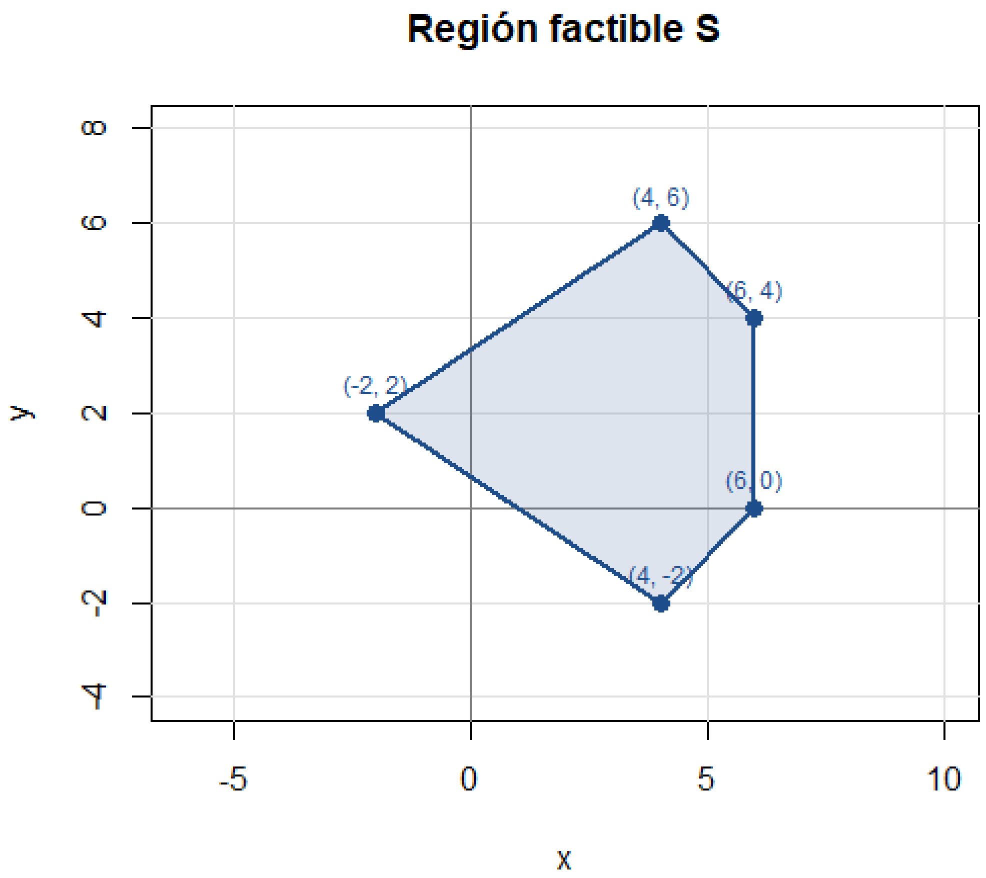
b) Opción 3.2

Considere la región S del plano delimitada por las siguientes restricciones:

$$x \leq 6, \qquad 3y - 2x \leq 10, \qquad 3y \geq 2 - 2x, \qquad x \leq 10 - y, \qquad y \geq x - 6$$

3.2.a) *(2 puntos)* Calcule las coordenadas de los vértices de S y represente gráficamente la región S.

Calculamos las intersecciones de cada par de rectas frontera y conservamos los puntos que satisfacen todas las restricciones:



Los cinco vértices son:

	Vértice	x	y
L1-L4	1	6	4
L1-L5	2	6	0
L2-L3	3	-2	2
L2-L4	4	4	6
L3-L5	5	4	-2

3.2.b) *(0,5 puntos)* Se desea minimizar la función $Z = 3y - \frac{x}{2}$ en S. Indique el valor mínimo y el punto de la región en el que se alcanza.

Evaluamos la función objetivo en cada vértice:

	x	y	Z
L1-L4	6	4	9
L1-L5	6	0	-3
L2-L3	-2	2	7
L2-L4	4	6	16
L3-L5	4	-2	-8

El valor mínimo es:

$$\boxed{Z_{\text{min}} = -8 \text{ alcanzado en el punto } (4, -2)}$$

Pregunta 4 (2,5 puntos) — Probabilidad

Responda únicamente a una de las dos opciones.

c) Opción 4.1

Sean A, B y C tres sucesos de los que se conoce la siguiente información:

$$P(A) = 0{,}4, \quad P(B) = 0{,}6, \quad P(C) = 0{,}5$$

$$P(A \mid C) = 0{,}6, \quad P(B \mid C) = 0{,}8$$

$$P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C) \cdot P(B \mid C), \quad P(A \cap B \mid \bar{C}) = 0{,}08$$

4.1.a) ***(1 punto)*** **Determine si A y B son independientes.**

Usando la independencia condicional dado C y el teorema de la probabilidad total:

$$P(A \cap B) = P(A \cap B \mid C) \cdot P(C) + P(A \cap B \mid \bar{C}) \cdot P(\bar{C})$$
$$= 0.48 \cdot 0.5 + 0.08 \cdot 0.5 = 0.28$$

Como $P(A) \cdot P(B) = 0.4 \cdot 0.6 = 0.24 \neq 0.28 = P(A \cap B)$:

$$\boxed{A \text{ y } B \text{ no son independientes}}$$

4.1.b) ***(1,5 puntos)*** **Determine la probabilidad de que C ocurra sabiendo que A y B ocurrieron.**

Por el teorema de Bayes:

$$P(C \mid A \cap B) = \frac{P(A \cap B \mid C) \cdot P(C)}{P(A \cap B)} = \frac{0.48 \cdot 0.5}{0.28}$$

$$\boxed{P(C \mid A \cap B) = \frac{6}{7} \approx 0.8571}$$

d) Opción 4.2

En un laboratorio farmacéutico se realiza un test de control de calidad para detectar productos defectuosos antes de su distribución. Se conoce la siguiente información:

- El 3 % de los productos presenta un defecto grave, el 7 % un defecto leve y el resto no presenta defectos.
- Si el defecto es grave, el test da positivo el 98 % de las veces.
- Si el defecto es leve, el test da positivo el 80 % de las veces.
- Si el producto no tiene defectos, el test da positivo el 5 % de las veces.

4.2.a) ***(1,2 puntos)*** **Calcule la probabilidad de que el test de un producto seleccionado al azar dé negativo**.

Definimos los sucesos: DG = defecto grave, DL = defecto leve, ND = no defecto.

Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(-) = P(-|\ DG) \cdot P(DG) + P(-|\ DL) \cdot P(DL) + P(-|\ ND) \cdot P(ND)$$
$$= 0{,}02 \cdot 0{,}03 + 0{,}20 \cdot 0{,}07 + 0{,}95 \cdot 0{,}90$$

$$\boxed{P(\text{negativo}) = 0.8696}$$

4.2.b) ***(1,3 puntos)*** **Si el test de un producto ha dado positivo, calcule la probabilidad de que el defecto sea grave.**

$P(+) = 1 - P(-) = 0.1304$. Aplicamos el teorema de Bayes:

$$P(DG \mid +) = \frac{P(+|\ DG) \cdot P(DG)}{P(+)} = \frac{0{,}98 \cdot 0{,}03}{0.1304}$$

$$\boxed{P(DG \mid +) = 0.2255 \approx 22.55\,\%}$$