MATEMÁTICAS II (Examen resuelto y criterios de corrección)

- Responda en el pliego en blanco a **cuatro preguntas cualesquiera** de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
- Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

Pregunta 1. Opción A. Has llegado a la Universidad y decides hacer una fiesta con tus compañeros de clase para conoceros. Para ello debes conseguir dinero. Tres estudiantes del grupo decidís fabricar pulseras, collares y marcapáginas para venderlos e intentar conseguir lo que necesitáis. Para fabricarlas, Luis compra el material necesario para hacer 20 pulseras y 20 collares a juego, Ana el de 30 pulseras, 20 collares y 10 marca páginas. Para decidir a qué precio se debe vender cada producto miras los tickets de compra, pero sólo pone el precio final, 60 € el ticket de Luis y 90 € el de Ana.

(a) **(1 punto)** Plantea un sistema de ecuaciones lineal que modelice el problema y escríbelo matricialmente especificando quién es la matriz de coeficientes y la matriz ampliada.

(b) **(1 punto)** Con los datos dados, ¿pueden saber cuánto cuesta el material para producir cada artículo? Luis dice 'creo que ha costado 10 € el material para cada marca páginas' y Ana le dice 'eso no puede ser' ¿Quién tiene razón?

(c) **(0.5 puntos)** Se venden los collares a 5€ y las pulseras a 4 €. ¿Cuál debe ser el precio de los marca páginas para que se obtengan exactamente 420 € tras la venta completa?

Pregunta 1. Opción B. Sea $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula en caso de que sea posible AB y BA especificando el tamaño y el rango de la matriz resultante.

(b) **(1.25 puntos)** Calcula el determinante de A y los valores de x para los cuales existe su inversa. Calcula cuando sea posible $\det(A^{-1})$.

Pregunta 2. Opción A. Se considera la función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{1-x^2}$.

(a) **(1 punto**) Calcula el dominio de la función f y sus asíntotas.

(b) **(1 punto)** Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(c) **(0.5 puntos)** Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.

Pregunta 2. Opción B. (2.5 puntos) Se dispone de una placa circular de 4 metros de radio, de la que se pretende obtener una pieza rectangular de área máxima. Sabiendo que el centro del rectángulo estará en el centro de la placa, calcule la longitud de los lados del rectángulo y el área del mismo. (Ayuda: la ecuación de la circunferencia de centro en el punto (a, b) radio r es $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.)

Pregunta 3. Opción A. Dada la función $f(x) = \cos^4(x)\,\mathrm{sen}(x)$.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula una primitiva de f que pase por el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

(b) **(1.25 puntos)** Calcula el área limitada por f, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.

Pregunta 3. Opción B. Dos drones están realizando un vuelo de forma que las alturas de cada uno de ellos viene dado por las funciones $h_1(t) = 36/t$ y $h_2(t) = t^3 + 5t$ de tiempo, con $t \in [1, 4]$.

(a) **(0.5 puntos)** Calcula los instantes en los que los dos drones se encuentran a la misma altura.

(b) **(1 punto)** Calcula los puntos de máxima altura de los dos.

(c) **(1 punto)** Calcula el área acotada encerrada entre ambas curvas y el eje OX.

Pregunta 4. Opción A. Se consideran los puntos $A = (2, 1, 3)$ y $B = (0, -1, 1)$.

(a) **(1.25 puntos)** Encuentra la ecuación del plano π que cumple que los dos puntos son simétricos respecto a él.

(b) **(1.25 puntos)** Dado el plano $\pi' \equiv x + y + z = 3$, razona valores de y y de z para que $C = (2, y, z) \in \pi'$ y la distancia de C a A sea de 3 unidades.

Pregunta 4. Opción B. Se consideran los puntos $P = (1, 1, 1)$, $Q = (1, 0, 1)$ y el vector $\vec{v} = (1, -1, 1)$.

(a) **(0.75 puntos)** Calcula la ecuación continua de la recta r que pasa por P y en la dirección de $\vec{v}$.

(b) **(0.75 puntos)** Calcula las ecuaciones de la recta s que corta a r perpendicularmente y que pasa por Q.

(c) **(1 punto)** Calcula la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s.

Pregunta 5. Opción A. Estás jugando a un juego online consistente en lanzar bolas a una diana. El juego te asigna un personaje al azar de 10 posibles, 4 de ellos son azules y los 6 restantes rojos. La probabilidad de que un personaje azul de en la diana es 0.95, mientras que si el personaje es rojo es de 0.65.

(a) **(1.25 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que aciertes?

(b) **(1.25 puntos)** Haces un lanzamiento y aciertas en la diana, ¿qué es más probable que tengas un personaje azul o rojo?

Pregunta 5. Opción B. En una comunidad autónoma se pretende medir el nivel de conocimientos en matemáticas de estudiantes de cuarto de ESO. Para ello se realiza un examen tipo test con 100 preguntas y en cada una de ellas debe decidirse si la afirmación es verdadera o falsa. Un estudiante decide responder al azar a todas las preguntas.

(a) **(0.75 puntos)** Comprueba que el número de respuestas acertadas puede ser aproximada por una distribución normal y decide los parámetros que la describen.

(b) **(0.75 puntos)** Utilizando la aproximación anterior, calcula la probabilidad de que un estudiante que haya respondido al azar obtenga más de un 6, es decir, que tenga al menos 60 aciertos.

(c) **(1 punto)** Supongamos que se reduce el número de preguntas del examen a 10. Calcula la probabilidad de que un estudiante que responde al azar acierte 5 preguntas.

* Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.5) = 0.6915$, $F(0.6915) = 0.7549$, $F(2) = 0.9772$, $F(1.9) = 0.9713$, $F(0.34) = 0.6331$, $F(0.35) = 0.6455$, $F(0.9772) = 0.8340$.

En caso de que tu valor no coincida con los mostrados, toma el más cercano.

4. CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y MODELO DE EXÁMEN RESUELTO

Pregunta 1. Opción A. Has llegado a la Universidad y decides hacer una fiesta con tus compañeros de clase para conoceros. Para ello debes conseguir dinero. Tres estudiantes del grupo decidís fabricar pulseras, collares y marcapáginas para venderlos e intentar conseguir lo que necesitáis. Para fabricarlas, Luis compra el material necesario para hacer 20 pulseras y 20 collares a juego, Ana el de 30 pulseras, 20 collares y 10 marca páginas. Para decidir a qué precio se debe vender cada producto miras los tickets de compra, pero sólo pone el precio final, 60 € el ticket de Luis y 90 € el de Ana.

(a) **(1 punto)** Plantea un sistema de ecuaciones lineal que modelice el problema y escríbelo matricialmente especificando quién es la matriz de coeficientes y la matriz ampliada.

(b) **(1 punto)** Con los datos dados, ¿pueden saber cuánto cuesta el material para producir cada artículo? Luis dice ‘creo que ha costado 10 € el material para cada marca páginas’ y Ana le dice ‘eso no puede ser’ ¿Quién tiene razón?

(c) **(0.5 puntos)** Se venden los collares a 5€ y las pulseras a 4 €. ¿Cuál debe ser el precio de los marca páginas para que se obtengan exactamente 420 € tras la venta completa?

Solución:

Llamaremos ‘x’ a la variable precio del material para realizar un collar, ‘y’ al precio para realizar una pulseras y ‘z’ precio de cada marca páginas.

(a) **(1 punto)** Lo que ha costado el material de Luis estará distribuido entre 20 pulseras a un coste de x € cada una, es decir, se ha gastado 20x en material para fabricar pulseras y 20y para collares. Como su tique de compra es de 60 €, se tiene la ecuación:

$$20x + 20y = 60$$

Siguiendo el mismo proceso con la compra de Ana se tiene:

$$30x + 20y + 10z = 90$$

Por lo que el sistema buscado es:

$$\left.\begin{array}{rcl} 20x + 20y & = & 60 \\ 30x + 20y + 10z & = & 90 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 20 & 20 & 0 \\ 30 & 20 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 90 \end{pmatrix}$$

Así, las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 0 \\ 30 & 20 & 10 \end{pmatrix}; \qquad Ab = \left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 20 & 0 & 60 \\ 30 & 20 & 10 & 90 \end{array}\right)$$

(b) **(1 punto)** Como el sistema tiene menos ecuaciones que incógnitas no puede ser compatible determinado, en consecuencia, con los datos aportados no podríamos encontrar esa solución. Calculemos la solución paramétrica en caso de que exista:

$$Ab = \left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 20 & 0 & 60 \\ 30 & 20 & 10 & 90 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1/20} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 30 & 20 & 10 & 90 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 30F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -10 & 10 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 \to F_2/(-10)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo que una solución sería:

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & 9 - \alpha \\ y & = & \alpha \\ z & = & \alpha \end{array}\right\} \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Esta es la solución del sistema, pero en el problema real x, y, z deben ser números positivos. Por lo tanto, de la primera igualdad se tiene que $\alpha \leq 9$, de la segunda y la tercera, $\alpha \geq 0$, por lo que las únicas soluciones posibles corresponden a $\alpha \in [0, 9]$, por lo que z no puede valer 10.

(c) **(0.5 puntos)** Sabemos que se fabrican 50 pulseras y 40 collares, por lo tanto el dinero obtenido en esas condiciones es $50 \times 4 + 40 \times 5 = 400$ €. Así $420 - 400 = 20$ Y se debe obtener 20 € por la venta de los marca páginas, esto es $10z = 20$ y los marcapáginas deberían venderse a 2 €.

Pregunta 1. Opción B. Sea $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula en caso de que sea posible AB y BA especificando el tamaño y el rango de la matriz resultante.

(b) **(1.25 puntos)** Calcula el determinante de A y los valores de x para los cuales existe su inversa. Calcula cuando sea posible $\det(A^{-1})$.

Solución:

(a) **(1.25 puntos)** AB no puede realizarse, ya que el número de columnas de A, 3, no coincide con el número de filas de B, 2. Sí puede realizarse BA ya que B tiene 3 columnas y A tres filas. El producto sería:

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2x+6 \\ 4 & -2 & 2x-6 \end{pmatrix}$$

La matriz resultante tiene tamaño 2×3 y su rango es 2 ya que $\det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = -16 \neq 0$

(b) **(1.25 puntos)** Calculemos el determinante de A:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{pmatrix} \underbrace{=}_{\substack{F_2+F_1 \\ F_3-2F_1}} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & -4 & x-6 \end{pmatrix} \underbrace{=}_{F_3+2F_2}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & x+6 \end{pmatrix} = 2(x+6)$$

Por lo tanto, A tiene inversa para cualquier valor de $x \neq -6$.

El determinante de una matriz y el de su inversa son inversos, por lo tanto, si $x \neq -6$, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{2(x+6)}$.

Pregunta 2. Opción A. Se considera la función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{1-x^2}$.

(a) **(1 punto)** Calcula el dominio de la función f y sus asíntotas.

(b) **(1 punto)** Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(c) **(0.5 puntos)** Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.

Solución:

(a) **(1 punto)** La función f es un cociente de polinomios, por lo tanto su dominio es todo $\mathbb{R}$ salvo aquellos valores que anule el denominador. De esta forma $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{1-x^2} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{1-x^2} = -1$$

Por lo tanto la función tiene una asíntota horizontal en y = -1.

Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+1}{1-x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2+1}{1-x^2} = +\infty$$

Por lo tanto tiene dos asintotas verticales: x = 1 y x = -1.

No tiene asíntotas oblicuas.

(b) **(1 punto)** Para resolver este apartado, necesitamos calcular la derivadas de la función.

$$f'(x) = \frac{2x(1-x^2)-(x^2+1)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

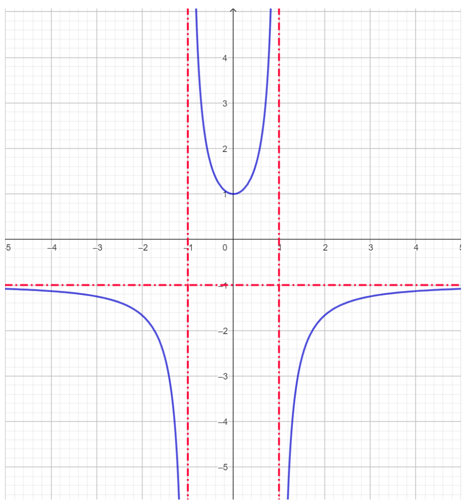
El único punto crítico es x = 0, que es el único valor que anula la derivada.

$$f''(x) = \frac{4(1-x^2)^2 - 4x2(-2x)(1-x^2)}{(1-x^2)^4} = \frac{12x^2+4}{(1-x^2)^3} \to f''(0) = 4 > 0$$

por lo tanto la función tiene un mínimo relativo en x = 0, donde la función vale f(0) = 1.

Como $f'(x) < 0$ si $x < 0$ y $f'(x) > 0$ si $x > 0$, por lo tanto la función es decreciente para $x < 0$ y creciente en caso contrario.

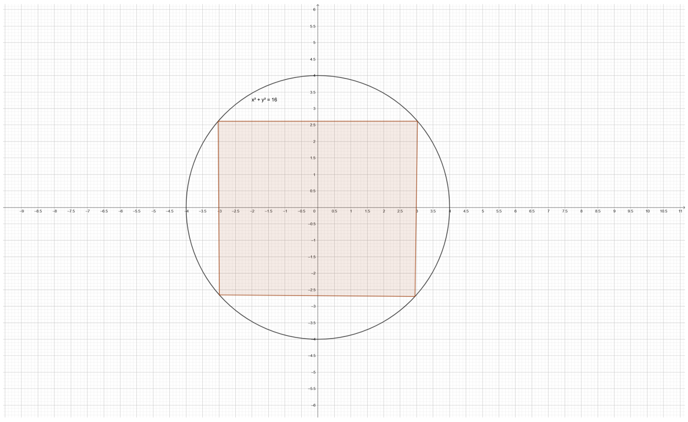
(c) **(0.5 puntos)**



Pregunta 2. Opción B. Se dispone de una placa circular de 4 metros de radio, de la que se pretende obtener una pieza rectangular de área máxima. Sabiendo que el centro del rectángulo estará en el centro de la placa, calcule la longitud de los lados del rectángulo y el área del mismo. (Ayuda: la ecuación de la circunferencia de centro en el punto (a, b) radio r es $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.)

Solución:

Si dibujamos la placa circular centrada en el origen, y suponemos que el rectángulo tiene sus vértices sobre la circunferencia, podemos decir que cada vértice está situado en los puntos que verifican $x^2 + y^2 = 16$. Además, dado que el centro de la placa está en el centro de la circunferencia, los vértices tendrían coordenadas $(-x, -y)$, $(x, -y)$, (x, y) y $(-x, y)$.



Vamos a simplificar el problema, maximizando el área del rectángulo que se encuentra en el primer cuadrante. Este área sería $a(x, y) = x * y$, para $x, y \geq 0$.

Como los puntos verifican la ecuación de la circunferencia $y = \sqrt{16 - x^2}$ por lo que la función área sería: $a(x) = x\sqrt{16 - x^2}$. Derivamos y obtenemos:

$$a'(x) = \sqrt{16 - x^2} - x\frac{2x}{2\sqrt{16 - x^2}} = \frac{x^2 - 16 + x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = \frac{2x^2 - 16}{\sqrt{16 - x^2}}$$

Para calcular el máximo haremos $a'(x) = 0 \to 2x^2 = 16 \to x = \pm 2\sqrt{2}$. Tomamos sólo el valor positivo, ya que estábamos trabajando sólo con el primer cuadrante.

Veamos que se trata de un máximo:

$$a''(x) = \frac{4x^2\sqrt{16 - x^2} - ()2x^2 - 16)\frac{-2x}{2\sqrt{16 - x^2}}}{16 - x^2}$$

Sustituyendo para $x = 2\sqrt{2}$ sabiendo que $x^2 = 8$ se tiene que $a''(2\sqrt{2}) = -4 < 0$ por lo que se trata de un máximo. El valor de y es $y = \sqrt{16 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ y por tanto los vértices del rectángulo pedido son: $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ $(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$, y el área es $4 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 32$.

,

Pregunta 3. Opción A. Dada la función $f(x) = \cos^4(x)\,\text{sen}(x)$.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula una primitiva de f que pase por el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

(b) **(1.25 puntos)** Calcula el área limitada por f, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.

Solución:

(a) Debemos calcular $I = \int \cos^4(x)\,\text{sen}(x)dx$, para ello haremos el cambio de variable $\cos(x) = t$ por lo que $-\text{sen}(x)dx = dt$ y

$$I = \int cos^4(x)\,\text{sen}(x)dx = \int -t^4 dt = -\frac{t^5}{5} + K = -\frac{1}{5}cos^5(x) + K$$

Como queremos que pase por el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ entonces $-\frac{1}{5}\cos^5\left(\frac{\pi}{2}\right) + K = 0$ por lo que $K = 0$.

(b) Dado que $\cos^4(x)$ es positivo para todo x y $\text{sen}(x)$ es positivo en el intervalo $[0, \pi]$, el área pedida es

$$I = \int_0^{\pi} cos^4(x)\,\text{sen}(x)dx = -\frac{1}{5}cos^5(x)\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{5}cos^5(\pi) + \frac{1}{5}cos^5(0) = \frac{2}{5}$$

Pregunta 3. Opción B. Dos drones están realizando un vuelo de forma que las alturas de cada uno de ellos viene dado por las funciones $h_1(t) = 36/t$ y $h_2(t) = t^3 + 5t$ de tiempo, con $t \in [1, 4]$.

(a) **(0.5 puntos)** Calcula los instantes en los que los dos drones se encuentran a la misma altura.

(b) **(1 punto)** Calcula los puntos de máxima altura de los dos.

(c) **(1 punto)** Calcula el área acotada encerrada entre las gráficas h_1 y h_2 y el eje OX.

Solución:

(a) Para ello resolvamos la ecuación $h_1(t) = h_2(t)$.

$$\frac{36}{t} = t^3 + 5t \to t^4 + 5t^2 - 36 = 0 \to t^2 = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \frac{-5 \pm 13}{2}$$

Por lo tanto, las posibles soluciones son $t^2 = 4$ y $t^2 = -18$. Esta última es imposible, ya que el cuadrado de un número real no puede ser negativo. Por lo tanto, $t = \pm 2$. Dado que t es positivo, el instante en que están a la misma altura es $t = 1$.

(b) $h_1'(t) = \frac{-36}{t^2}$ y no se anula nunca, por lo tanto la función es monótona. Como $h_1'(t)$ es negativo para todo x la función es siempre decreciente, por lo tanto el momento de máxima altura es t = 2.

$h_2'(t) = 3t^2 + 5$ no se anula nunca y es positivo para todo t, por lo que la función es creciente. El punto de máxima altura se encontrará en el instante t = 4.

(c) De los apartados anteriores se deduce que en el intervalo $[1, 2]$ es h_2 la gráfica que se encuentra por encima, y en el intervalo $[2, 4]$ es h_1 la gráfica que se encuentra por debajo. Por tanto el área pedida es:

$$A = \int_1^2 h_2(t)dt + \int_2^4 h_1(t)dt = \int_1^2 (t^3 + 5t)dt + \int_2^4 \frac{36}{t}dt = \left.\frac{t^4}{4} + \frac{5t^2}{2}\right|_1^2 + 36\log(t)|_2^4 =$$

$$= 36(\log(4) - \log(2)) = 36\log\left(\frac{4}{2}\right) = 36\log(2)\ (\approx 36.2033)$$

Pregunta 4. Opción A. Se consideran los puntos A = (2, 1, 3) y B = (0, −1, 1).

(a) **(1.25 puntos)** Encuentra la ecuación del plano π que cumple que los dos puntos son simétricos respecto a él.

(b) **(1.25 puntos)** Dado el plano $\pi' \equiv x + y + z = 3$, razona valores de y y de z para que $C = (2, y, z) \in \pi'$ y la distancia de C a A sea de 3 unidades.

Solución:

(a) **(1.25 puntos)** El plano pasará por el punto medio de A y B y será ortogonal al vector $\overrightarrow{AB}$.

El punto medio es:

$$PM = \frac{1}{2}((2, 1, 3) + (0, -1, 1)) = (1, 0, 2)$$

El vector que une los puntos A y B es:

$$\overrightarrow{AB} = (0, -1, 1) - (2, 1, 3) = (-2, -2, -2)$$

Así que el plano pedido es:

$$-2x - 2y - 2z + D = 0 \rightarrow -2 \times 1 - 2 \times 0 - 2 \times 2 + D = 0 \rightarrow D = 6$$

$$\pi \equiv -2x - 2y - 2z + 6 = 0 \rightarrow \pi \equiv x + y + z - 3 = 0$$

(b) **(1.25 puntos)** Como C pertenece a π' entonces $2 + y + z - 3 = 0$, lo que quiere decir que $y = 1 - z$.

La distancia de C a A es: $\sqrt{(0^2 + (1 - z - 1)^2 + (z - 3)^2)} = 3$

$$z^2 + (z - 3)^2 = 9 \rightarrow z^2 + z^2 - 6z + 9 = 9 \rightarrow 2z^2 - 6z = 0$$

Por lo tanto se tienen dos soluciones posibles: $z = 0$ que llevaría al punto $(2, 1, 0)$ y $z = 3$, con el que se obtiene el punto $(2, -2, 3)$.

Pregunta 4. Opción B. Se consideran los puntos $P = (1, 1, 1)$, $Q = (1, 0, 1)$ y el vector $\vec{v} = (1, -1, 1)$.

(a) **(0.75 puntos)** Calcula la ecuación continua de la recta r que pasa por P y en la dirección de $\vec{v}$.

(b) **(0.75 puntos)** Calcula las ecuaciones de la recta s que corta a r perpendicularmente y que pasa por Q.

(c) **(1 punto)** Calcula la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s.

Solución:

(a) **(0.75 puntos)** La ecuación vectorial de la recta sería:

$$r \equiv (x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(1, -1, 1)$$

y su ecuación paramétrica es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array}\right\}$$

Ecuación continua:

$$x - 1 = 1 - y = z - 1$$

(b) **(0.75 puntos)** El punto de r que pertenece también a s será de la forma $(1 + \lambda, 1 - \lambda, 1 + \lambda)$. Además, el vector que une este punto con Q debe ser ortogonal a r, es decir, al vector $\tilde{v}$, por lo tanto:

$$(1 + \lambda - 1, 1 - \lambda, 1 + \lambda - 1) \cdot (1, -1, 1) = 0 \rightarrow \lambda + \lambda - 1 + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

Por lo que r y s se cortan en el punto $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ y un vector director es el que une dicho punto con Q, es decir $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, de forma que la recta puede escribirse como sigue:

$$s \equiv (x, y, z) = (1, 0, 1) + \lambda \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \to \left.\begin{array}{l} x = 1 + \frac{1}{3}\lambda \\ y = \frac{1}{3}\lambda \\ z = 1 + \frac{1}{3}\lambda \end{array}\right\}$$

(c) **(1 punto)** El plano pedido pasa por el punto Q y sus vectores directores son, el de r y el de s, se puede escribir como sigue:

$$\pi \equiv (x, y, z) = (1, 0, 1) + \lambda \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \to \left.\begin{array}{l} x = 1 + \frac{1}{3}\lambda + \beta \\ y = \frac{1}{3}\lambda - \beta \\ z = 1 + \frac{1}{3}\lambda + \beta \end{array}\right\} \to x - z = 0$$

Pregunta 5. Opción A. Estás jugando a un juego online consistente en lanzar bolas a una diana. El juego te asigna un personaje al azar de 10 posibles, 4 de ellos son azules y los 6 restantes rojos. La probabilidad de que un personaje azul de en la diana es 0.95, mientras que si el personaje es rojo es de 0.65.

(a) **(1.25 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que aciertes?

(b) **(1.25 puntos)** Haces un lanzamiento y aciertas en la diana, ¿qué es más probable que tengas un personaje azul o rojo?

Solución:

Llamaremos A al suceso elegir un personaje azul y R a seleccionar un personaje rojo. Llamaremos G al suceso acertar en la diana y P al suceso fallar.

Sabemos que P(A) = $\frac{4}{10}$ = 0.4, P(R) = $\frac{6}{10}$ = 0.6. Además P(G/A) = 0.95, P(G/R) = 0.65.

(a) **(1.25 puntos)** Buscamos P(G). Utilizaremos el teorema de la probabilidad total:

$$P(G) = P(G \cap A) + P(G \cap R) = P(G/A)P(A) + P(G/R)P(R) = 0.95 \times 0.4 + 0.65 \times 0.6 = 0.77$$

(b) **(1.25 puntos)** Se pide la comparación entre P(A/G) y P(R/G):

$$P(A/G) = \frac{P(A \cap G)}{P(G)} = \frac{P(G/A)P(A)}{P(G)} = \frac{0.95 \times 0.4}{0.77} = 0.4935$$

$$P(R/G) = \frac{P(R \cap G)}{P(G)} = \frac{P(G/R)P(R)}{P(G)} = \frac{0.65 \times 0.6}{0.77} = 0.5065$$

Luego es más probable que se haya seleccionado un personaje rojo.

Pregunta 5. Opción B. En una comunidad autónoma se pretende medir el nivel de conocimientos en matemáticas de estudiantes de cuarto de ESO. Para ello se realiza un examen tipo test con 100 preguntas y en cada una de ellas debe decidirse si la afirmación es verdadera o falsa. Un estudiante decide responder al azar a todas las preguntas.

(a) **(0.75 puntos)** Comprueba que el número de respuestas acertadas puede ser aproximada por una distribución normal y decide los parámetros que la describen.

(b) **(0.75 puntos)** Utilizando la aproximación anterior, calcula la probabilidad de que un estudiante que haya respondido al azar obtenga más de un 6, es decir, que tenga al menos 60 aciertos.

(c) **(1 punto)** Supongamos que se reduce el número de preguntas del examen a 10. Calcula la probabilidad de que un estudiante que responde al azar acierte 5 preguntas.

Solución:

(a) **(0.75 puntos)** Denotando por A el acierto y con F el fallo, P(A) = 0.5. La variable aleatorial X 'acierto' sigue una distribución B(100, 0.5). Los datos son acordes para aproximar la binomial por la distribución normal:

$$n = 100 \geq 30; \quad np = 100 \times 0.5 = 50 \geq 5; \quad nq = 100 \times 0.5 = 50 \geq 5$$

De esta forma podemos aproximar la binomial por una normal. Los parámetros son:

$$\mu = np = 50; \qquad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \times 0.5 \times 0.5} = 5$$

Es decir, podemos aproximar B(100, 0.5) por una N(50, 5).

(b) **(0.75 puntos)** $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geq 60) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 60) = 1 - \mathrm{P}\left(\mathrm{Z} \leq \frac{60-50}{5}\right) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{Z} \leq 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$

Si se realiza la corrección de Yates, entonces

$$P(X \geq 60) = P(X' \geq 59.5) = 1 - P(X \leq 59.5) = 1 - P\left(Z \leq \frac{59.5-50}{5}\right)$$
$$= 1 - P(Z \leq 1.9) = 1 - 0.9713 = 0.0227$$

(c) **(1 punto)** En estas condiciones, $n = 10 \not\geq 30$ por lo tanto no se puede aproximar por una normal, es necesario resolverlo con la distribución binomial B(10, 0.5):

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} 0.5^5 0.5^5 = \frac{10!}{5!5!} 0.5^5 0.5^5 = 0.2461$$

Criterios de corrección

Pregunta 1. Opción A.

Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

- ➢ Bloque A: Sentido numérico.
- ➢ Bloque D: Sentido algebraico.
- ➢ Bloque F: Sentido socioafectivo.

Calificación máxima otorgada: 1 punto los apartados (a) y (b) y 0.5 puntos el apartado (c).

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Competencias desarrolladas: CE1, CE2, CE3, CE4, CE5, CE6, CE8, CE9.

Pregunta 1. Opción B.

Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

- ➢ Bloque A: Sentido numérico.
- ➢ Bloque D: Sentido algebraico.
- ➢ Bloque F: Sentido socioafectivo.

Calificación máxima otorgada: 1.25 puntos cada apartado.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Competencias desarrolladas: CE4, CE5, CE6, CE8, CE9.

Pregunta 2. Opción A.

Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

- ➢ Bloque B: Sentido de la medida.
- ➢ Bloque D: Sentido algebraico.

➢ Bloque F: Sentido socioafectivo.

Calificación máxima otorgada: 1 punto los apartados (a) y (b) y 0.5 puntos el apartado (c).

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Competencias desarrolladas: CE1, CE2, CE3, CE5, CE6, CE7, CE8, CE9.

Pregunta 2. Opción B.

Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

➢ Bloque B: Sentido de la medida.

➢ Bloque D: Sentido algebraico.

➢ Bloque F: Sentido socioafectivo.

Calificación máxima otorgada: 1.25 puntos cada apartado.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Competencias desarrolladas: CE1, CE2, CE3, CE5, CE6, CE7, CE8, CE9.

Pregunta 3. Opción A.

Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

➢ Bloque B: Sentido de la medida.

➢ Bloque D: Sentido algebraico.

➢ Bloque F: Sentido socioafectivo.

Calificación máxima otorgada: 0.5 puntos el apartado (a), 1 punto los apartados (b) y (c)

.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Competencias desarrolladas: CE1, CE2, CE3, CE5, CE6, CE7, CE8, CE9.

Pregunta 3. Opción B.

Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

- ➢ Bloque B: Sentido de la medida.
- ➢ Bloque C: Sentido espacial.
- ➢ Bloque F: Sentido socioafectivo.

Calificación máxima otorgada: 1.25 puntos cada apartado.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Competencias desarrolladas: CE1, CE2, CE4, CE6, CE7, CE8, CE9.

Pregunta 3. Opción B.

Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

- ➢ Bloque B: Sentido de la medida.
- ➢ Bloque C: Sentido espacial.
- ➢ Bloque F: Sentido socioafectivo.

Calificación máxima otorgada: 0.75 puntos los apartados (a) y (b), 1 punto el apartado (c).

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Competencias desarrolladas: CE1, CE2, CE4, CE6, CE7, CE8, CE9.

Pregunta 5. Opción A.

Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

- ➢ Bloque B: Sentido de la medida.
- ➢ Bloque E: Sentido estocástico.
- ➢ Bloque F: Sentido socioafectivo.

Calificación máxima otorgada: 1.25 puntos cada apartado.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Competencias desarrolladas: CE1, CE2, CE3, CE6, CE7, CE8, CE9.

Pregunta 5. Opción B.

Criterios específicos de corrección

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta:

- ➢ Bloque B: Sentido de la medida.
- ➢ Bloque E: Sentido estocástico.
- ➢ Bloque F: Sentido socioafectivo.

Calificación máxima otorgada: 0.75 puntos los apartados (a) y (b) 1 punto el apartado (c).

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.

Competencias desarrolladas: CE1, CE2, CE3, CE6, CE7, CE8, CE9.