TEMA 4: MATRICES

1. DEFINICIÓN

Definimos una matriz como **tablas numéricas** rectangulares, siendo todos los números reales. Todas ellas están formadas por **filas** (m) y **columnas** (n). Por lo que diremos que una matriz tiene siempre como dimensión *m x n.* En la figura 1, podemos observar una matriz donde se distinguen los **términos,** que es cada elemento que conforma la matriz siendo cada uno de los términos los que indican la fila y la columna. Por ejemplo, el termino a_{21} indicará que es la segunda fila y primera columna. En las matrices se pueden encontrar la **diagonal principal** que estará conformada por todos los elementos que están en la línea roja y la **diagonal secundaria** que está en la línea azul.

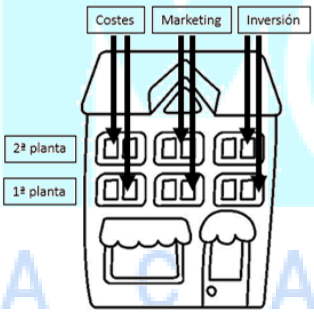
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Figura 1

Problema resuelto

Una empresa está instaurada en un edificio con 2 plantas. En cada planta podemos encontrar 3 departamentos distintos:
- El departamento de análisis de costes
- El departamento de marketing
- El departamento de inversión

Una auditoría pretende cuantificar la cantidad de ordenadores disponibles en cada departamento. Y se observa lo siguiente:



1. Conteste a las siguientes preguntas

a) ¿Que hay en la segunda planta en el departamento central?
b) ¿Cuántos ordenadores hay disponibles en la primera planta?
c) ¿Cuántos ordenadores hay en total en el departamento de costes?
d) ¿Qué departamento tiene mayor cantidad de ordenadores?
e) ¿Cuántos ordenadores hay en total en la empresa?
f) ¿Qué dimensiones tiene el edificio?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Si observamos la matriz A nos será más cómodo contestar a las cuestiones

a) Hay 3 ordenadores
b) Hay 12 ordenadores
c) Hay 7 ordenadores
d) El departamento de costes
e) Hay 18 ordenadores
f) El edificio tiene unas dimensiones de 2 x 3

2. TIPOS DE MATRICES

Podemos encontrar diferentes tipos de matrices:

2.1 Matrices fila

Son matrices del tipo 1 x n.

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

2.2 Matrices columna

Son matrices del tipo m x 1.

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

2.3 Matriz nula

Son matrices donde todos los elementos son cero.

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.4 Matriz cuadrada

Son matrices cuyo número de filas y columnas es igual (m = n). Llamamos orden al número de filas o al de columnas que tiene la matriz. Los elementos que son del tipo a_{mn}, donde m y n son igual, conforman la llamada diagonal principal.

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

2.5 Matriz rectangular

Es cualquier matriz no cuadrada, es decir, cuyo número de filas y columnas son diferentes.

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

3. TIPOS DE MATRICES CUADRADAS

3.1 Matriz triangular superior

Todos los elementos por debajo de la diagonal principal son nulos (cero).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Diagonal principal

3.2 Matriz triangular inferior

Todos los elementos por encima de la diagonal principal son nulos (cero).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Diagonal principal

3.3 Matriz diagonal

Fuera de la diagonal principal todo son ceros

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

3.4 Matriz identidad

Se denota por I o por I_n donde n es el orden de la matriz. Es una matriz diagonal con diagonal principal de unos.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. OPERACIONES CON MATRICES

Con las matrices podremos realizar diferentes operaciones:

4.1 Suma y resta de matrices y sus propiedades

Es necesario que las matrices para que se sumen sean de la **misma dimensión** (**equidimensionales**). No tienen que ser cuadradas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Sean las matrices A y B calculamos A+B

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & -7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 7 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Las propiedades de esta operación serán:

- Asociativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Conmutativa: Es decir, el orden de la suma no afecta al resultado. Ejemplo: $A + B = B + A$
- Elemento neutro: Siempre tendremos una matriz con todos los elementos a cero, que cuando lo sumamos a otra matriz A, nos dará la misma matriz. Ejemplo: $A + 0 = 0 + A = A$
- Matriz opuesta: Toda matriz tiene una matriz opuesta (Se definirá como –A). Sabremos que es una matriz opuesta si se da $A + (-A) = 0$

4.2 Producto de una matriz por un escalar y sus propiedades

Al multiplicar un número (k) por una matriz, todos los elementos internos de la matriz quedan multiplicados por ese número

$$k \cdot A = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & \dots & k \cdot a_{1n} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & \dots & k \cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k \cdot a_{m1} & k \cdot a_{m2} & \dots & k \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Por ejemplo:

$$2 \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-3) & 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-6} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

Las propiedades de esta operación serán:

- **Asociativa**: $a \cdot (b \cdot A) = (a \cdot b) \cdot A$
- **Distributiva I**: $a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$
- **Distributiva II**: $(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$
- **Elemento neutro**: $I \cdot A = A$

  Aclaremos que a y b son números mientras que A sería la matriz.

4.3 Producto de matrices y sus propiedades

Es importante saber que, para poder multiplicar dos matrices, es necesario que coincidan el número de columnas de la primera matriz con el número de filas de la segunda matriz (véase fórmula siguiente, mostrado en rojo). Las dimensiones de la matriz resultante son "número de filas de la primera matriz x número de columnas de la segunda matriz" (véase fórmula siguiente, mostrado en azul).

$$A_{m\,x\,p} \cdot B_{p\,x\,n} = (A \cdot B)_{m\,x\,n}$$

Mostremos un **ejemplo** de la operativa para multiplicar. Sean las matrices A y B

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, siempre debemos comprobar si se puede realizar el producto que deseemos. En este caso A por B (AB). Tenemos el número de filas seleccionado en rojo y el de columnas en azul,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$A_{2\,x\,3} \cdot B_{3\,x\,2} = (A \cdot B)_{2\,x\,2}$ (como coinciden el número de columnas de A (3) con las filas de B (3), sí que se puede realizar el producto)

Realizamos el producto, para ello se multiplican las cada una de las filas de la primera matriz por cada columna de la segunda matriz y se suman dichos elementos:

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 4 + (-3) \cdot 0 + 4 \cdot 1 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 4 + (-3) \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 5 \cdot 2 + (-3) \cdot 5 + 4 \cdot 3 \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 4 + (-3) \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 5 \cdot 2 + (-3) \cdot 5 + 4 \cdot 3 \\ 0 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & \dots \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 4 + (-3) \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 5 \cdot 2 + (-3) \cdot 5 + 4 \cdot 3 \\ 0 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 4 + (-3) \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 5 \cdot 2 + (-3) \cdot 5 + 4 \cdot 3 \\ 0 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$$

Para dejarlo más claro, realicemos un ejercicio sobre esto:

<u>Problema resuelto</u>

2. Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. Calcular $A \cdot B$.

Solución

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

La matriz A es de orden 3 x **2** y la matriz B de orden **2** x 3. Puesto que las dimensiones señaladas en negrita coinciden, las matrices son multiplicables. La dimensión de la matriz resultante corresponde a los números no señalados en negrita, es decir, 3 x 3.

$$\begin{pmatrix} 3\cdot 2+1\cdot 0 & 3\cdot 0+1\cdot 3 & 3\cdot 1+1\cdot(-4) \\ 2\cdot 2+(-1)\cdot 0 & 2\cdot 0+(-1)\cdot 3 & 2\cdot 1+(-1)\cdot(-4) \\ 0\cdot 2+3\cdot 0 & 0\cdot 0+3\cdot 3 & 0\cdot 1+3\cdot(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 6 \\ 0 & 9 & -12 \end{pmatrix}$$

La multiplicación de matrices está directamente relacionada con la **potencia de matrices**. Sabemos que las potencias son productos sucesivos (por ejemplo, $2^3 = 2\cdot 2\cdot 2$); como consecuencia usaremos ese producto en el caso de las matrices debido a que el producto de matrices no es conmutativo, es decir, en el caso de las matrices no es lo mismo hacer el producto AB que BA.

Problema resuelto

3. Determina la potencia sucesiva de la matriz para poder calcular B^{100}

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

No vamos a multiplicar la matriz 100 veces, porque no acabaríamos nunca el ejercicio. Vamos a observar, por ejemplo, las cuatro primeras multiplicaciones (debemos realizar multiplicaciones hasta que encontremos alguna relación entre ellas):

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si observamos resultados anteriores, podemos determinar que el único elemento que cambia es a_{12}. La potencia sucesiva es por lo tanto la siguiente:

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que:

$$B^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Siempre se recomienda obtener al menos las cuatro primeras potencias. A veces, se podrá observar solo con las tres primeras, pero a veces es engañoso, de forma que habitualmente haremos las cuatro primeras multiplicaciones.

Las propiedades de esta operación son:

- **Asociativa**: Podremos prescindir de los paréntesis al multiplicar varias matrices. Siempre y cuando las dimensiones sean multiplicables. $(A_{m \times n} \cdot B_{n \times p}) \cdot C_{p \times q} = A_{m \times n} \cdot (B_{n \times p} \cdot C_{p \times q})$
- **No conmutativa**: No es lo mismo que $A \cdot B$ que $B \cdot A$. De hecho, es posible que podamos realizar la operación $A \cdot B$, pero no $B \cdot A$, dependiendo de las dimensiones. Esta propiedad es muy importante puesto que aquí se cometen la mayor parte de los fallos del tema.
- **Distributiva**: Siempre y cuando las dimensiones de las matrices permitan realizarlas operaciones tendremos: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + B \cdot C$

5. MATRIZ TRASPUESTA Y SUS PROPIEDADES

Es la matriz obtenida al cambiar las filas por las columnas o viceversa. Se simboliza poniendo una "t" como superíndice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Las propiedades de las matrices traspuestas son:

- **Doble trasposición**: La traspuesta de la traspuesta es la matriz original

$$(A^t)^t = A$$

- **Traspuesta de una suma**: La traspuesta de la suma es la suma de traspuestas

$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

- **Traspuesta de un producto**: La transpuesta del producto solo conmuta para un número, no para una matriz

$$(k \cdot A)^t = k \cdot A^t \qquad (A \cdot B)^t = A^t \cdot B^t$$

5.1 Matriz simétrica

Es aquella matriz igual a su traspuesta. Sus elementos son iguales con respecto a la diagonal principal, es decir, $A = A^t$

Por ejemplo: La siguiente matriz A es simétrica ya que verifica A = A^t

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Es importante recordar que dos matrices son iguales si tienen igual dimensión y además cada uno de los elementos de dentro de las matrices coinciden atendiendo a su posición.

5.2 Matriz antisimétrica

Es aquella matriz que su opuesta es igual a su traspuesta. Sus elementos son opuestos con respectos a la diagonal principal y su diagonal principal es de ceros, es decir, $A = -A^t$

Por ejemplo: La siguiente matriz A es antisimétrica ya que verifica $A = -A^t$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 \\ -4 & 0 & -3 \\ -7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -7 \\ 4 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -7 \\ 4 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

6. MATRIZ INVERSA Y SUS PROPIEDADES

Como consecuencia de que en las matrices no existe la división a la hora de operar entre matrices aparece el concepto de matriz inversa.

La matriz inversa es aquella matriz que al multiplicarla por su genérica obtenemos la identidad. Las matrices que tienen inversa se llaman regulares o invertibles y las que no, singulares. La simbolizamos como A^{-1} Obviamente, las matrices que tienen inversa son cuadradas. En resumen, se cumple que:

$$A \cdot A^{-1} = I$$

Las propiedades de las matrices inversas son:

- **Doble inversión**: La inversa de la inversa es la genérica

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

- **Inversa de un producto**: La inversa de un producto es el producto invertido de las inversas

$$(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$$

- **Conmutativa para la traspuesta e inversa**: La traspuesta de la inversa es la inversa de la traspuesta

$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$$

Este concepto nos sirve para poder resolver ecuaciones matriciales.

Problema resuelto

5. Despeja la matriz X

$$X \cdot A = B + C$$

Solución

Utilizaremos la definición de matriz inversa para despejar la X, puesto que no podemos pasarla dividiendo al otro lado de la ecuación (no existe la división de matrices). La definición nos dice que:

$$A \cdot A^{-1} = I$$

Por lo que si multiplicamos por la derecha a ambos lados de la ecuación nos queda:

$X \cdot A \cdot A^{-1} = (B + C) \cdot A^{-1}$ y si nos fijamos en la definición ($A \cdot A^{-1} = I$) podemos simplificar

$X \cdot I = (B + C) \cdot A^{-1}$, además, sabemos que multiplicar por la identidad es como multiplica por uno

$$X = (B + C) \cdot A^{-1}$$

Ya tenemos la matriz X despejada. La inversa sirve para despejar ecuaciones matriciales. Para poder determinar la matriz X debemos realizar la suma de B y C y multiplicarlo por la inversa de A.

Aclaremos que es muy importante el orden en el que despejamos (esto provoca errores comunes) ya que es consecuencia del concepto de matriz inversa y de la multiplicación la cual no es conmutativa.

Aún no hemos aprendido a calcular la inversa, lo aprenderemos en el siguiente tema por el método de los determinantes. Clásicamente se suele explicar el cálculo de inversas con dos métodos distintos, en nuestro caso omitiremos uno de ellos (Método de Gauss – Jordan) puesto que es más largo y complicado y preferimos que el alumnado se centre en optimizar su tiempo. En las pruebas no pueden pedir calcular inversas por un método concreto, se deja libertad al alumno/a para calcularla.