MATEMÁTICAS II

EXAMEN OFICIAL SELECTIVIDAD REALIZADO EN MADRID EN LA CONVOCATORIA ORDINARIA 2023/2024

Debe responder a 4 preguntas cualesquiera a elegir entre las 8 que se proponen en el siguiente examen:

A.1.- Calificación máxima: 2.5 puntos

Se tienen listones de madera de tres longitudes diferentes: largos, intermedios y cortos. Puesto uno tras otro, tanto con dos listones largos y cuatro intermedios como con tres intermedios y quince cortos se consigue la misma longitud total. Un listón largo supera en 17cm la medida de uno intermedio más uno corto. Y con nueve listones cortos hemos de añadir 7cm para igualar la longitud de uno intermedio seguido por uno largo. Se pide calcula la longitud de cada tipo de listón.

Solución:

Las variables del problema son:

x: longitud del listón largo
y: longitud del listón intermedio
z: longitud del listón corto.

Las ecuaciones dadas son:

$$\begin{gathered} 2x + 4y = 3y + 15z \\ x = y + z + 17 \\ x + y = 9z + 7 \end{gathered}$$

Reordenando,

$$\begin{gathered} 2x + y - 15z = 0 \\ x - y - z = 17 \\ x + y - 9z = 7 \end{gathered}$$

Podemos sumar la primera y la segunda obteniendo,

$$3x - 16z = 17$$

Y sumando la segunda y la tercera,

$$2x - 10z = 24$$

Multiplicando por 2 la primera y por 3 la segunda obtenemos

$$6x - 32z = 34$$
$$6x - 30z = 72$$

Restando,

$$-2z = -38 \rightarrow z = 19\ cm$$

Por tanto,

$$2x = 24 + 10z = 24 + 190 \rightarrow x = 107\ cm$$

Finalmente, usando la tercera ecuación

$$y = 7 + 9z - x = 7 + 9 \cdot 19 - 107 = 71\ cm$$

La solución es:

$$x = 107\ cm, y = 71\ cm, z = 19\ cm$$

A.2.- Calificación máxima: 2.5 puntos

Para la función $f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4$, se pide:

a) **(0.5 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en x = π**
b) **(1 punto) Probar que f(x) tiene, al menos, un punto con derivada nula en el intervalo $(-\pi, 0)$ utilizando justificadamente el teorema de Rolle. Probar de nuevo la misma afirmación utilizando adecuadamente, esta vez, el teorema de Bolzano.**
c) **(1 punto) Si g(x) = f(-x), calcular el área entre las gráficas de f(x) y g(x) en el intervalo $[0, \pi]$**

Solución:

a) La ecuación de la recta tangente es:

$$y - f(\pi) = f'(\pi)(x - \pi)$$

Entonces

$$f(\pi) = \pi^4 + \pi^4 + \pi^4 + \pi^4 + \pi^4 = 5\pi^4$$

La derivada de la función es:

$$f'(x) = 4x^3 + 3\pi x^2 + 2\pi^2 x + \pi^3$$

Por lo que:

$$f'(\pi) = 10\pi^3$$

Finalmente,

$$y - 5\pi^4 = 10pi^3(x - \pi) \rightarrow y = 10\pi^3 x - 5\pi^4$$

b) Para que se satisfagan las condiciones del teorema de Rolle se ha de cumplir que la función sea continua y derivable en el intervalo dado, que lo es al ser polinómica.

Entonces, si $f(-\pi) = f(0)$ entonces habrá un punto c en el intervalo dado tal que $f'(c) = 0$

$$f(-\pi) = \pi^4$$
$$f(0) = \pi^4$$

Por lo que sí se satisface el teorema y existe un punto de derivada nula en el intervalo.

Para usar el teorema de Bolzano, sabiendo que $f(x)$ es continua en el intervalo, tenemos que ver que la función derivada se anula.

La estrategia será evaluar la derivada en $x = -\pi$ y en $x = 0$, y si tienen valores de signo opuesto entonces existirá un punto donde la derivada se anula.

$$f'(x) = 4x^3 + 3\pi x^2 + 2\pi^2 x + \pi^3$$

Tenemos que

$$f'(-\pi) = -2\pi^3$$
$$f'(0) = \pi^3$$

Por lo que $f'(x)$ se anula en dicho intervalo.

c) La función $g(x)$ es:

$$g(x) = x^4 - \pi x^3 + \pi^2 x^3 - \pi^3 x + \pi^4$$

Igualamos ambas funciones para ver si hay puntos de intersección:

$$f(x) = g(x) \rightarrow 2\pi x^3 + 2\pi^3 x = 0 \rightarrow x^3 + \pi^2 x = 0 \rightarrow x(x^2 + \pi^2) = 0$$

Que solo tiene solución si $x = 0$. Si hubiese un punto extra entonces el área podría cambiar.

Por tanto, la integral pedida es

$$\int_{\mathbf{1}}^{\boldsymbol{e}} \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_1^e (2\pi x^3 + 2\pi^3 x)dx = 2\pi x^4/4 + 2\pi^3 x^2/2|_1^e = \frac{3\pi^5}{2}$$

A.3.- Calificación máxima: 2.5 puntos

Dados los puntos A (0,0,1) y B (1,1,0), se pide:

a) **(1 punto) Hallar una ecuación del plano que pasa por los puntos A y B y es perpendicular al plano z = 0**
b) **(1,5 puntos) Hallar ecuaciones de dos rectas paralelas, que pasen por los puntos A y B respectivamente, estén en el plano x + z = 1 y tales que la distancia entre ellas sea 1.**

Solución:

a) El plano pasa por el punto A, tiene de vector director el $\overrightarrow{AB} = (1,1,-1)$ y el vector normal al plano $z = 0$, que es el $(0,0,1)$.

Por tanto, el plano pedido vendrá dado por el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x - y = 0$$

b) La recta r_1: $(x, y, z) = (0,0,1) + \lambda(a, b, c)$, mientras que la recta r_2: $(x, y, z) = (1,1,0) + \mu(a, b, c)$

Podemos poner que tienen el mismo vector director al ser paralelos.

Que estén en el plano $x + z = 1$ implica que el vector director de las dos rectas es perpendicular al vector normal al plano, $(1,0,1)$

Entonces,

$$(a, b, c) \cdot (1,0,1) = 0 \rightarrow a = -c$$

Las rectas son:

$$r_1: (x, y, z) = (0,0,1) + \lambda(a, b, -a)$$
$$, r_2: (x, y, z) = (1,1,0) + \mu(a, b, -a)$$

Que su distancia sea de 1 unidad implica que

$$d(P, r) = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{AB}|}{|\vec{v}|}$$

El producto vectorial entre el vector director y el vector $\overrightarrow{AB}$ es:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & -a \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (a - b, 0, a - b)$$

Cuyo módulo es

$$\left|\vec{v} \times \overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2(a-b)^2}$$

Y el módulo del vector director de la recta es

$$|\vec{v}| = \sqrt{2a^2 + b^2}$$

Entonces,

$$\frac{\sqrt{2(a-b)^2}}{\sqrt{2a^2+b^2}} = 1 \rightarrow 2(a-b)^2 = 2a^2 + b^2 \rightarrow b^2 - 4ab = 0$$

Cuyas soluciones son:

$$b = 0, b = 4a$$

Entonces, va a haber dos pares de rectas que satisfagan las condiciones del enunciado, un par de rectas con el vector director $(1,0,-1)$, y otro con el vector director $(1,4,-1)$

$$r_1: (x,y,z) = (0,0,1) + \lambda(1,0,-1)$$
$$, r_2: (x,y,z) = (1,1,0) + \mu(1,0,-1)$$

$$r_1: (x,y,z) = (0,0,1) + \lambda(1,4,-1)$$
$$, r_2: (x,y,z) = (1,1,0) + \mu(1,4,-1)$$

(Los parámetros del vector director se insertan dentro del parámetro de la recta por simplificar).

A.4.- Calificación máxima: 2.5 puntos

Sabiendo que $p(\bar{A}) = \frac{11}{20}$, $p(A|B) - p(B|A) = \frac{1}{24}$ y $p(A \cap \bar{B}) = \frac{3}{10}$, se pide:

a) (1,5 puntos) Calcular $p(A \cap B)$ y $p(B)$

b) (1 punto) Calcular p(C), siendo C otro suceso del espacio muestral, independiente de A y que verifica que $p(A \cup B) = \frac{14}{25}$

<u>Solución:</u>

a) Pongamos lo que sabemos:

$$P(A) = 9/20$$

$$P(A|B) - P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} - \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(A \cap B)\left(\frac{1}{P(B)} - \frac{1}{P(A)}\right) = \frac{1}{24}$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 3/10 \rightarrow \; P(A \cap B) = 9/20 - 3/10 = \frac{3}{20}$$

Insertando esto en la segunda ecuación,

$$\frac{3}{20}\left(\frac{1}{P(B)} - \frac{20}{9}\right) = \frac{1}{24} \rightarrow \frac{1}{P(B)} - \frac{20}{9} = \frac{20}{24 \cdot 3} \rightarrow \frac{1}{P(B)} = \frac{20}{24 \cdot 3} + \frac{20}{9} = \frac{5}{2}$$

Finalmente,

$$P(B) = \frac{2}{5}$$

b) Como A y C son independientes,

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = P(A) + P(C) - P(A)P(C) = \frac{9}{20} + P(C)\left(1 - \frac{9}{20}\right) = \frac{14}{25}$$

Entonces,

$$P(C) = \left(\frac{14}{25} - \frac{9}{20}\right)\frac{11}{20} \rightarrow P(C) = \frac{1}{5}$$

B.1.- Calificación máxima: 2.5 puntos

Consideremos las matrices reales $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$ $y\ C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $con\ b \neq 0$

Se pide:

a) **(1.25 puntos) Encontrar todos los valores de b para los que se verifica** $BC B^{-1} = A$
b) **(0.75 puntos) Calcular el determinante de la matriz** AA^t
c) **(0.5 puntos) Resolver el sistema** $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **para b = 1**

<u>Solución:</u>

a) Como B^{-1} existe, entonces el determinante de B es distinto de 0 y por eso dicen que $b \neq 0$. Podemos reescribir la ecuación de una manera más cómoda:

$$BCB^{-1} = A \rightarrow BCB^{-1}B = AB \rightarrow BC = AB$$

$$b\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En ambos casos podemos tachar las b y obtenemos la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Por lo que se satisface para todo b.

b) Si calculamos el determinante de la matriz obtendremos $|A| = 12$

Entonces,

$$|AA^t| = |A| \cdot |A^t| = |A|^2 = 144$$

c) Para $b = 1$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones descrito es

$$\begin{gathered} x + 2y + z = 3 \\ 2x + 3y + z = -1 \\ x + y + z = 1 \end{gathered}$$

Si restamos la primera y la tercera,

$$y = 2$$

Si restamos 2 veces la primera menos la segunda,

$$y + z = 7$$

Por lo que

$$z = 5$$

Finalmente,

$$x = 3 - z - 2y = 3 - 5 - 4 = -6$$

La solución es

$$(x, y, z) = (-6,2,5)$$

B.2.- Calificación máxima: 2.5 puntos

Calcule:

a) **(1.25 puntos)** $\int_1^e (x+2)ln(x)dx$

b) **(1.25 puntos)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(tg\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{cosx}}$

Solución:

a) Integramos por partes,

$$u = ln(x) \rightarrow du = \frac{1}{x}dx$$
$$dv = (x+2)dx \rightarrow v = x^2/2 + 2x$$

Entonces,

$$\int_1^e (x+2)ln(x)dx = (x^2/2+2x)ln(x)|_1^e - \int_1^e (x/2+2)dx = (x^2/2+2x)ln(x) - x^2/4 - 2x|_1^e = \frac{9+e^2}{4}$$

b) Si evaluamos el límite obtendremos 1^∞, por lo que:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(tg\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{cosx}} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tg(x/2)-1)\frac{1}{cos(x)}}$$

Entonces,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(tg(x/2)-1)\frac{1}{cos(x)} = 0/0$$

Aplicamos L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(tg(x/2)-1)\frac{1}{cos(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{cos^2(x/2)}\cdot\frac{1}{2}}{-sen(x)} = -1$$

Finalmente, el límite es

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(tg\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{cosx}} = e^{-1}$$

B.3.- Calificación máxima: 2.5 puntos

Al ordenador de una impresora 3D se le suministraron ayer las coordenadas de los cuatro vértices P_1,P_2,P_3 y P_4 de un tetraedro sólido, el cual construyó al momento. Se sabe que $P_1(1,1,1)$, $P_2(2,1,0)$ y $P_3(1,3,2)$, pero del cuatro punto P_4 (3,a,3) hoy no estamos seguros del valor de su segunda coordenada.

a) (1.5 puntos) A partir de la cantidad de material utilizado por la impresora sabemos que el volumen del tetraedro es V = 1. También sabemos que la longitud de ninguna de sus aristas supera la altura de la impresora, que es 10. Determine los posibles valores de a.

b) (1 punto) Dado el punto Q(3,3,3), se quiere imprimir ahora el paralelepípedo que tiene a los segmentos P_1P_2,P_1P_3 y P_1Q como aristas. ¿Cuáles serían los valores de las coordenadas de los ocho vértices del paralelepípedo que habría que suministrar al ordenador?

<u>Solución:</u>

a) Para calcular el volumen del tetraedro calculamos

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (1,0,-1)$$
$$\overrightarrow{P_1P_3} = (0,2,1)$$
$$\overrightarrow{P_1P_4} = (2,a-1,2)$$

El valor absoluto del producto mixto de estos vectores entre 6 nos dará el volumen del tetraedro:

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & a-1 & 2 \end{vmatrix} = |-a+9|/6 = 1$$

Entonces,

$$|-a+9| = 6$$

Que tiene dos soluciones:

$$-a+9 = 6 \ \rightarrow a = 3$$
$$-a+9 = -6 \ \rightarrow a = 15$$

La correcta será la que haga que $\overrightarrow{P_1P_4}$ mida menos de 10,

Para $a = 3$

$$\overrightarrow{P_1P_4} = (2,2,2) \rightarrow \left|\overrightarrow{P_1P_4}\right| = \sqrt{12} < 10$$

Para $a = 15$

$$\overrightarrow{P_1P_4} = (2,14,2) \rightarrow \left|\overrightarrow{P_1P_4}\right| = \sqrt{204} > 10$$

Por lo que la correcta es $a = 3$

b) Para este apartado tenemos que hacer combinaciones lineales de

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (1,0,-1)$$
$$\overrightarrow{P_1P_3} = (0,2,1)$$
$$\overrightarrow{P_1P_4} = (2,2,2)$$

El punto P_5

$$P_5 = P_1 + (1,0,-1) + (0,2,1) = (2,3,1)$$

El punto P_6

$$P_6 = P_1 + (1,0,-1) + (2,2,2) = (4,3,2)$$

El punto P_7

$$P_7 = P_1 + (0,2,1) + (2,2,2) = (3,5,4)$$

Y el punto P_8

$$P_8 = P_1 + (1,0,-1) + (0,2,1) + (2,2,2) = (4,5,3)$$

B.4.- Calificación máxima: 2.5 puntos

Tenemos dos dados no trucados de seis caras, uno azul y uno rojo. Las caras están numeradas del 1 al 6. En un determinado juego, lanzamos los dos dados. Para calcular la puntuación obtenida, se sigue el siguiente procedimiento: si el número obtenido en el dado azul es par, se le suma el doble del número obtenido en el dado rojo; si el número obtenido en el dado azul es impar, se le suma el número obtenido en el dado rojo. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de obtener una puntuación de 10. Calcular la probabilidad de obtener una puntuación impar.
b) (1.5 puntos) Calcular la probabilidad de haber obtenido un número par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8. Calcular la probabilidad de haber obtenido un número impar en el dado rojo sabiendo que la puntuación final ha sido un número par.

Solución:

a) Si obtenemos par en el dado azul tendremos los resultados 2, 4 y 6. Al lanzar el dado rojo obtendremos los números del 1 al 6, y el resultado se multiplicará por 2.

Podemos obtener un 10 si sacamos 2 y después 4, si sacamos 4 y después 3 y si sacamos 6 y después 2.

Si obtenemos un número impar entonces sale 1, 3 y 5. Al lanzar el dado rojo obtendremos los números del 1 al 6. Para obtener un 10 solamente podemos lanzar un 5 y después otro 5, por lo que tenemos 4 posibilidades en total entre 36 combinaciones.

La probabilidad es:

$$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

En cuanto a obtener un número impar, es imposible obtenerlo obteniendo par al lanzar el dado azul, pues todos los resultados son pares.

En cuanto al dado azul impar, si obtenemos 1 después podemos obtener 2, 4 y 6.

Si obtenemos 3 podemos obtener después 2, 4 y 6.

Si obtenemos 5 podemos obtener después un 2, un 4 y un 6.
Hay 9 posibilidades entre 36 posibles combinaciones, por lo que la probabilidad es:

$$\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

b) Tenemos que calcular las maneras de obtener un 8 al obtener par e impar al lanzar el dado azul.

Si obtenemos par en el dado azul:

- Si sacamos un 2, podemos después sacar un 3 y obtener 8.
- Si sacamos un 4, podemos obtener después un 2 y conseguir un 8.
- Si sacamos un 6, podemos obtener después un 1 y conseguir un 8.

Hay 3 posibilidades para este caso.

- Si obtenemos impar en el dado azul:
- Si sacamos un 3 podemos después obtener 5, consiguiendo el 8.
- Si sacamos un 5 podemos después obtener un 3, consiguiendo el 8.

Hay 2 posibilidades para este caso.

Tenemos 3 posibles casos (par en el dado azul) entre 5 configuraciones posibles.

La probabilidad es

$$\frac{3}{5}$$

Para el siguiente caso, queremos obtener la probabilidad de conseguir puntuación par obteniendo impar en el dado rojo.

- Si tiramos el dado azul y sale par, hay 9 posibilidades de obtener par sacando impar en el dado rojo.
- Si tiramos el dado azul y sale impar, hay otras 9 posibilidades de obtener par sacando impar en el dado rojo.

Eso son 18 posibles sucesos entre 36.

A este número le tenemos que dividir la probabilidad de ser par.

- Si tiramos el dado azul y sale par, hay 18 posibilidades de obtener puntuación par.
- Si tiramos el dado azul y sale impar, hay 9 posibilidades de obtener puntuación impar.

Eso son 27 entre 36.

La probabilidad es:

$$\frac{\frac{18}{36}}{\frac{27}{36}} = 2/3$$