

MATEMÁTICAS CCSS

EXAMEN OFICIAL SELECTIVIDAD REALIZADO EN MADRID EN LA CONVOCATORIA ORDINARIA 2023/2024

Debe responder a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen en el siguiente examen:

1.- (2 puntos) Se considera la matriz A dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & -2 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & -2 & a \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para los que exista la inversa de A .

b) Para $a = -2$, Calcule A^{-1}

Solución:

a) Para que exista la inversa de A su determinante ha de ser distinto de 0. Vamos a calcular el determinante en función de a y ver cuándo se anula.

El determinante de la matriz es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-a & -2 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & -2 & a \end{vmatrix} = -a^3 + a^2 + 2a$$

Si igualamos $|A| = 0$,

$$|A| = 0 \rightarrow -a^3 + a^2 + 2a = 0 \rightarrow a(-a^2 + a + 2) = 0 \rightarrow -a(a-2)(a+1) = 0$$

Entonces el determinante de la matriz se anula si $a = 0$, $a = 2$, $a = -1$. Por tanto, podemos afirmar que A tendrá inversa para todos los valores del parámetro a que no sean 0, 2 o -1.

b) Sabemos que para $a = -2$ existe la inversa de la matriz por el apartado anterior.

El primer paso para obtener la inversa es calcular el determinante de A para $a = -2$

$$|A| = -2(-2-2)(-2+1) = 2(-4)(-1) = 8$$

A continuación, vamos a calcular la traspuesta de A y después su matriz adjunta.

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

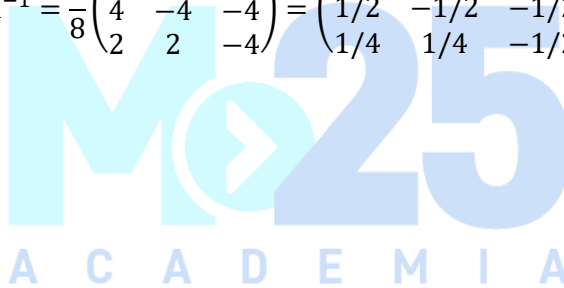
La matriz de adjuntos:

$$Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 \\ 4 & -4 & -4 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Recordad que para conseguir un elemento de la matriz de adjuntos hemos de tachar la fila y columna en la que se encuentre dicho elemento, y calcular el menor 2×2 correspondiente. También tenemos que cambiar el signo del segundo elemento de la primera fila, del primero y tercero de la segunda fila y del segundo de la tercera fila.

Finalmente, multiplicamos por la inversa del determinante de A

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 \\ 4 & -4 & -4 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/4 & 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}$$



2.- (2 puntos) Sea $f(x)$ una función real de la variable real cuya derivada viene dada por la siguiente expresión:

$$f'(x) = x^2 + x - 2$$

a) Obtenga la expresión de la función $f(x)$ sabiendo que pasa por el punto $(0,2)$.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, clasificando sus extremos relativos si procede.

Solución:

a) Como nos dan la expresión de $f'(x)$, podemos integrar esta función para obtener $f(x)$.

$$\begin{aligned}\int f'(x)dx &= f(x) + c \\ \int (x^2 + x - 2)dx &= x^3/3 + x^2/2 - 2x + c\end{aligned}$$

Nos indican que $f(0) = 2$

Entonces,

$$f(0) = c = 2$$

La función pedida es:

$$f(x) = x^3/3 + x^2/2 - 2x + 2$$

b)

Primero, hemos de tener en cuenta que el dominio de la función son todos los números reales. Una vez tenemos esto claro, pasamos a hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, que consistirá en buscar los puntos que anulan $f'(x)$

$$f'(x) = x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = 1, x = -2$$



Por lo que:

- La función crece de $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$ porque $f'(x) > 0$
- La función decrece de $(-2, 1)$ porque $f'(x) < 0$

3.- (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + e^2 & \text{Si } x < 1 \\ ae^{2x} & \text{Si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Halle el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea continua en todo su dominio.

b) Para $a = 1$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas $x=1$ y $x=2$.

Solución:

a) Lo primero de todo es que las funciones que componen la función a trozos son continuas por tratarse de polinomios y exponenciales.

Para que $f(x)$ sea continua en todo su dominio los límites laterales en $x = 1$ han de coincidir.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - x + e^2 = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ae^{2x} = ae^2$$

Para que sean continuas,

$$ae^2 = e^2 \rightarrow a = 1$$

b) Como nos están pidiendo el área entre $x = 1$ y $x = 2$ tomaremos la función que está a la derecha del 1.

Tenemos que intersecar esta función con el eje de abscisas, pero $e^{2x} = 0$ no tiene ninguna solución. Esto hace que el área pedida sea simplemente la integral:

$$\int_1^2 e^{2x} dx = e^{2x} / 2 \Big|_1^2 = e^4 / 2 - e^2 / 2 = \frac{e^2}{2} (e^2 - 1) \approx 23,6u^2$$

4.- (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-9}$$

a) Determine las asíntotas de esta función.

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

a) Primero vamos a analizar las asíntotas verticales, que son los puntos que el denominador de esta función se anule. Esto es,

$$x^2 - 9 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$$

Entonces, la función tendrá una asíntota vertical en $x = 3$ y otra en $x = -3$

Para $x = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \rightarrow +\infty$$

Para $x = -3$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) \rightarrow +\infty$$

Para las asíntotas horizontales analizamos dos límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \rightarrow 0$$

Porque el grado del denominador es mayor que el numerador.

Y también:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \rightarrow 0$$

Por lo que hay una asíntota horizontal en $y = 0$ por ambos lados. Como hay una horizontal para $+\infty$ y otra para $-\infty$, no habrá ninguna asíntota oblicua.

b) La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

Analizamos $f(0)$

$$f(0) = \frac{2}{9}$$

Hallamos $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 9) - (x - 2)2x}{(x^2 - 9)^2} = \frac{-x^2 + 4x - 9}{(x^2 - 9)^2}$$

Entonces,

$$f'(0) = \frac{-9}{81} = \frac{-1}{9}$$

Finalmente,

$$y - \frac{2}{9} = \frac{-1}{9}x \rightarrow y = \frac{-1}{9}x + \frac{2}{9}$$



5.- (2 puntos) Se dispone de 60 gramos de ácido acetilsalicílico para elaborar tabletas en dos formatos, de 4 gramos y de 3 gramos respectivamente. Se necesitan al menos tres tabletas de 4 gramos, al menos ocho tabletas de 3 gramos y al menos el doble de tabletas de 3 gramos que de 4 gramos. Cada tableta de 4 gramos proporciona un beneficio de 1,5 euros y cada tableta de 3 gramos proporciona un beneficio de 1 euro. ¿Cuántas tabletas deberían fabricarse de cada tipo para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el beneficio máximo?

Solución:

Las restricciones son:

$$4x + 3y \leq 60$$

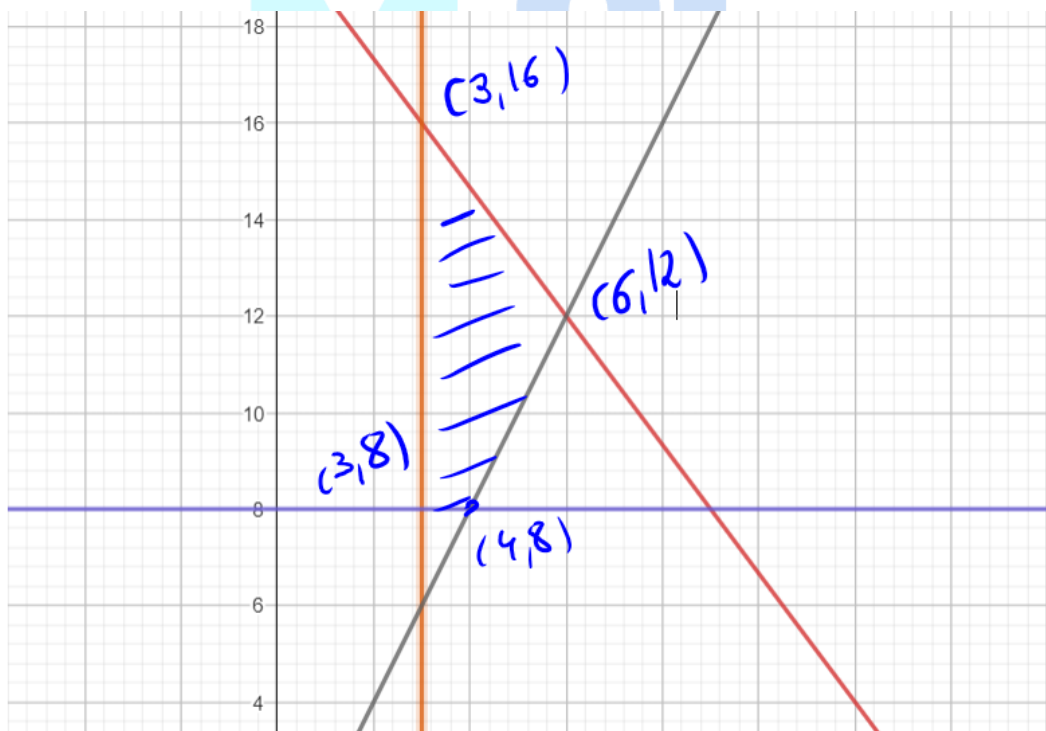
$$x \geq 3$$

$$y \geq 8$$

$$2x \leq y$$

Y la función es $f(x, y) = 1,5x + y$

Esbozamos una gráfica con las ecuaciones dadas para ver cómo se limita nuestra región:



Evaluamos estos puntos de intersección en $f(x,y)$ y buscamos el máximo beneficio,

$$f(3,8) = 12,5\text{€}$$

$$f(3,16) = 20,5\text{€}$$

$$f(6,12) = 21\text{€}$$

$$f(4,8) = 14\text{€}$$

El máximo beneficio ocurre si $x = 6, y = 12$



6.- (2 puntos) Un equipo de baloncesto regional ha vendido tres tipos de entradas para su último partido. Las entradas generales se han vendido a 10 euros, las entradas para estudiantes a 8 euros y las entradas infantiles a 5 euros. El equipo ha conseguido vender 600 entradas y ganar 4900 euros. Además, se sabe que ha vendido el doble de entradas generales que de entradas infantiles. Plantee el sistema de ecuaciones y resuelva para calcular el número de entradas vendidas de cada tipo.

Solución:

Definimos las variables del sistema

x : número de entradas generales

y : número de entradas de estudiantes

z : número de entradas infantiles

Las ecuaciones que nos dan:

$$x + y + z = 600$$

$$10x + 8y + 5z = 4900$$

$$x - 2z = 0$$

Vamos a resolver el sistema por el método de Cramer.

Podemos realizar el determinante de la matriz del sistema, $|A|$, obteniendo

$$|A| = 1$$

La coordenada x :

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{200}{1} = 200$$

La coordenada y :

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{300}{1} = 300$$

La coordenada z :

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{100}{1} = 100$$

7.- (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$;

$$\left. \begin{array}{rrcr} 2x & +y & +z & = a \\ x & +ay & +z & = a+1 \\ x & +y & +az & = 2 \end{array} \right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a=1$.

Solución:

a) La matriz del sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Y la matriz ampliada:

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & a+1 \\ 1 & 1 & a & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de A en función de a para discutir su rango:

$$|A| = 2a^2 - 2a$$

Si $|A| = 0$

$$2a^2 - 2a = 0 \rightarrow a = 0, a = 1$$

Por tanto, si $a \neq 0, a \neq 1$ entonces el rango de A es 3, y consecuentemente el rango de la matriz ampliada también es 3, por lo que se trata de un sistema compatible determinado.

Para $a = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene rango 2 porque la fila 1 menos la fila 2 dan la fila 3.

Para el rango de la matriz ampliada,

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si encontramos un menor 3x3 distinto de 0 entonces el rango de esta matriz será 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Por lo que el rango de la matriz ampliada es 3. Al ser el rango de A 2 tenemos que el sistema es incompatible.

Para $a = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene rango 2 porque la fila 2 y la fila 3 coinciden.

Para el rango de la matriz ampliada,

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Los tres menores 3x3 son:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Y todos estos determinantes valen 0 porque tenemos siempre dos filas o dos columnas iguales. Esto implica que el rango de la matriz ampliada es 2.

Como el rango de A es 2, que es igual al rango de la ampliada, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para este caso el sistema es compatible indeterminado. Podemos tachar la última ecuación y nos queda:

$$2x + y + z = 1$$

$$x + y + z = 2$$

Parametrizando $z = \lambda$

$$2x + y = 1 - \lambda$$

$$x + y = 2 - \lambda$$

Restando las dos ecuaciones,

$$x = -1$$

Despejando de la primera,

$$y = 1 - \lambda - 2x \rightarrow y = 1 - \lambda + 2 = 3 - \lambda$$

La solución al sistema es:

$$(x, y, z) = (-1, 3 - \lambda, \lambda)$$



8.- (2 puntos) En un festival de música con 200 asistentes se observa que a 90 personas les gusta el pop, a 70 el techno y a 30 les gustan ambos géneros. Eligiendo al azar a un asistente del festival, calcule la probabilidad de que:

a) Le guste al menos uno de los dos géneros musicales.

b) Le guste el techno, pero no el pop.

Solución:

a) Realizamos una tabla de contingencia:

	Pop	No pop	Total
Techno	30	40	70
No techno	60	70	130
Total	90	110	200

La probabilidad de que le guste al menos uno de los dos:

$$P(\text{Techno} \cup \text{Pop}) = P(\text{Pop}) + P(\text{Techno}) - P(\text{Techno} \cap \text{Pop}) = \frac{90}{200} + \frac{70}{200} - \frac{30}{200} = \frac{130}{200} = 0,65$$

b) Esa probabilidad será:

$$p = \frac{40}{200} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0,2$$

9.- (2 puntos) La cantidad de agua absorbida por un tipo particular de planta acuática se puede modelar con una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ ml.

a) Se selecciona aleatoriamente una muestra de 25 plantas acuáticas y se determina que la cantidad media de agua absorbida es de 120 ml. Calcule un intervalo de confianza del 95 % para la media de la cantidad de agua absorbida por este tipo de planta acuática.

b) Determine el tamaño mínimo de la muestra necesario para que el error máximo, en la estimación de la media de la cantidad de agua absorbida, sea menor que 1 ml, con un nivel de confianza del 90%.

Solución:

a) El intervalo es

$$120 \pm 1,96 \frac{8}{\sqrt{5}} \rightarrow 120 \pm 3,36$$

Que da lugar a $120 - 3,36 = 116,64$ y $120 + 3,36 = 123,36$

b) En este caso,

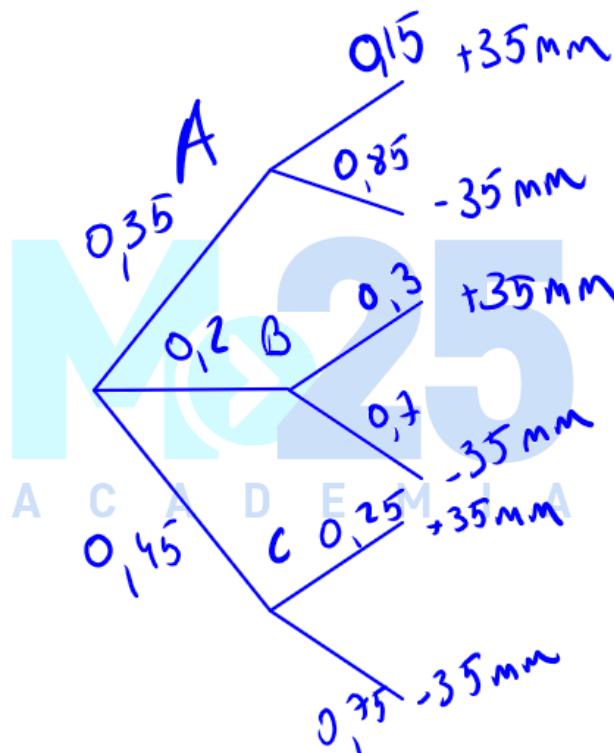
$$1 = 1,65 \cdot \frac{8}{\sqrt{N}} \rightarrow N = (1,65 \cdot 8)^2 = 174,24 \approx 174$$

10.- (2 puntos) En tres tanques, A, B y C, de una piscifactoría se crían, respectivamente, el 35 %, el 20 % y el 45 % de los alevines de salmón noruego. Se sabe que el 15 % de los alevines criados en el tanque A, el 30 % de los alevines criados en el tanque B y el 25 % de los alevines criados en el tanque C miden más de 35mm. Eligiendo al azar un alevín de salmón noruego, calcule la probabilidad de que:

- a) Mida más de 35 mm.
b) Sabiendo que no mide más de 35 mm, proceda del tanque C.

Solución:

a) Realizamos el diagrama de árbol correspondiente



La probabilidad de tener una longitud mayor de 35 mm es

$$p(+35mm) = 0,35 \cdot 0,15 + 0,2 \cdot 0,3 + 0,45 \cdot 0,25 = 0,225$$

b) La probabilidad pedida es

$$P(C|-35mm) = \frac{P(-35mm|C) \cdot P(C)}{P(-35mm)} = \frac{0,45 \cdot 0,75}{1 - 0,225} = 0,4354$$