MATEMÁTICAS II

EXAMEN OFICIAL SELECTIVIDAD EBAU REALIZADO EN MADRID EN LA CONVOCATORIA 2022/2023

Debe responder a cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen en el siguiente examen:

A.1.Calificación máxima: 2,5 puntos

En una obra, para transportar la tierra extraída para la construcción de los cimientos de un edificio, se usan tres tipos de camiones diferentes: A, B Y C. Los camiones de tipo A tienen una capacidad de 14 toneladas, los de tipo B, de 24 toneladas y los de tipo C, de 28 toneladas. Habría que traer un camión más de tipo A para igualar el número de camiones restantes. El 10% de la capacidad de todos los camiones tipo B supone un séptimo de los de mayor tonelaje. Hoy, realizando un único viaje cada camión a máxima capacidad, se han extraído de la obra 302 toneladas de tierra. ¿Cuánta tierra ha sido transportada hoy por los camiones de cada tipo?

A → 11 toneladas (x)	x + 1 = y + z
B → 24 toneladas (y)	$0{,}1 \cdot 24y = \frac{287}{7}$
C → 28 toneladas (z)	14x + 24y + 28z = 302

x - y – z = -1	x – y – z = -1	x – y – z
16,8y = 28 z	16,8y – 28z= 0	84y – 104z = 0
14x + 24 y + 28 z = 302	14x + 24 y + 28z =302	14x +24 y + 28z = 302

Aplicamos la regla de Cramer

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 84 & -940 \\ 14 & 24 & 28 \end{vmatrix} = 8848$$

$$x = \frac{61936}{8848} = 7 \quad y = \frac{44240}{8848} = 5 \quad z = \frac{26544}{8848} = 3$$

X = 7 camiones y = 5 camiones z = 3 camiones

Si multiplicamos cada número de camiones por las toneladas que soporta, obtenemos la respuesta:

A = 98 T B = 120 T C = 84 T

A.2. Calificación máxima: 2,5 puntos

Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$, se pide:

a) (0,25 puntos) Estudiar si es par o impar

Para que sea par tiene que cumplirse que f(x) = f(-x)

f(-x)= $\sqrt[3]{((-x)^2-1)^2} \ = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$ = Es par

b) (0,75 puntos) Estudiar su derivabilidad en el punto x=1

Dado que f(x) = $\mathbb{R}$ f(x)= $(x^2-1)^{2/3}$

f'(x) = $\frac{2}{3}\ (x^2-1)^{-\frac{1}{3}} \cdot\ 2x = \frac{4x}{3\sqrt{(x^2-1)}}$

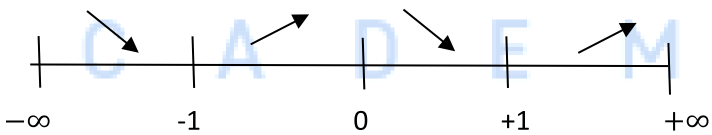
x^2-1= 0

X $\neq$ -1

f'(1) = $\frac{4}{3\ \sqrt{0}} = \frac{4}{0} = No\ derivable$

c) (1,5 puntos) Estudiar sus extremos relativos y absolutos

f'(x) = 0 ; $\frac{4x}{3\sqrt{(x^2-1)}} = 0$; 4x = 0 ; x = 0



Máximo (0,1)

Mínimo $\begin{bmatrix} (-1.0) \\ (1{,}0) \end{bmatrix}$

Estos puntos son relativos, vamos a comprobar si alguno es absoluto. Los mínimos son absolutos puesto que la función está acotada para esos límites según la descripción de los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

El máximo no es absoluto puesto que:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{(x^2-1)^2} = +\infty$$

A.3. Calificación máxima: 2,5 puntos

Sean los puntos A (1,-2,3), B (0,2,-1) y C (2,1,0)

a) (1,25 puntos) Comprobar que forman un triángulo T y hallar una ecuación del plano que los contiene

3 puntos en el espacio determinan un triángulo si no están alineados

$\overrightarrow{AB}$ = (0,2,-1) – (1,-2,3) = (-1,4,-4)

$\overrightarrow{AC}$ = (2,1,0) – (1,-2,3) = (1,3,-3)

$\overrightarrow{AB} \cdot K \cdot = \overrightarrow{AC}$ No hay dependencia $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -4 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ r(A)= 2 No están alineados

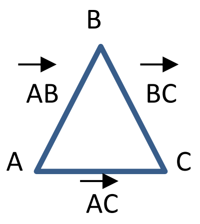
$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$; -7y -7z +7 =0 ; -7y -7z =-7 ; y+z =1

b) (0,75 puntos) Calcular el corte de la recta que pasa por los puntos A y B con el plano z = 1

r = $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 2 + 4\lambda \\ z = -1 - 4\lambda \end{cases}$ $1 = -1 - 4\lambda$; $4\lambda = -1 - 1$; $4\lambda = -2$; $\lambda = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

x= $\frac{-1}{2}$ y= 0 z=1

c) (0,5 puntos) Determinar el perímetro del triángulo T



$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{1 + 16 + 16} = \sqrt{33}$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{1 + 9 + 9} = \sqrt{19}$

$|BC| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

$|\overrightarrow{BC}| = (2,1,0) - (0,2,-1) = (2,-1,1)$

Perímetro = $\sqrt{33} + \sqrt{19} + \sqrt{6} = 12{,}55\ u$

A.4. Calificación máxima: 2,5 puntos

Se tiene un suceso A de probabilidad P(A) = 0,3

a) (0,75 puntos) Un suceso B de probabilidad P(B) = 0,5 es independiente de A. Calcule P (A ∪ B)

P(A ∪ B) = P(A) + P(B) - p(A ∩ B)

P(A ∪ B) = $0{,}3 + 0{,}5 - (0{,}3 \cdot 0{,}5) = \frac{13}{20} = 0{,}65$

b) (0,75 puntos) Otro suceso C cumple P(C|A) = 0,5. Determina P(A∩$\overline{C}$)

p(C|A) = p(AnC) / p(A) ; p(AnC) = 0,5 · 0,3 = 0,15

p(AnC') = p(A) – p(AnC) = 0,3 – 0,15 = 0,15

c) (1 punto) Si se tiene un suceso D tal que $p(\bar{A} \mid \mathrm{D}) = 0,2$ y $P(D|\mathrm{A}) = 0,5$, calcule P(D).

$$p(D \cap A) = 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}15$$

$$p(D) = \frac{p(\bar{A} \cap D)}{p(A/D)} = \frac{p(D) - 0{,}15}{0{,}2} \rightarrow p(D) = 0{,}1875$$

B.1. Calificación máxima: 2,5 puntos

Dado el sistema $\begin{cases} (a+1)x & +4y & & = 0 \\ 0 & (a-1)y & +z & = 3 \\ 4x & +2ay & +z & = 3 \end{cases}$

a) (1,25 puntos) Discutirlo en función del parámetro a

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 4 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 4 & 2a & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} a+1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 & 3 \\ 4 & 2a & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = [(a^2-1)+16] - [2a^2+2a] = a^2 + 15 - 2a^2 = -a^2 - 2a + 15 = 0$$

$$a = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (1) \cdot (15)}}{2(-1)} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{-2} = \frac{2 \pm 8}{-2} = \qquad a = -5\,; \qquad a = 3$$

$$\forall a \in \mathbb{R} - \{-5{,}3\} r(A) = 3 = r(A^*),, SCD$$

Si a = - 5

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ 4 & -10 & 1 \end{pmatrix} \quad r(A) = 2 \qquad A^* = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 3 \\ 4 & 2a & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 3 \\ 4 & -10 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad |A^*| = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad |A^*| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 3 \\ -10 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Si a = 3

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} = |A^*| = 0$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad |A^*| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad |A^*| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Si a =-5 ; r (A) = 2 = r (A^*) ,, SCI Uniparamétrico

a = 3 ; Si a=3 r(A) = 2 = r(A^*) ,, SCI Uniparamétrico

b) (0,5 puntos) Resolverlo para a = 3

$$\begin{cases} 4x & 4y & 0 & = 0 \\ 0 & 2y & +z & = 3 \\ 4x & +6y & +z & = 3 \end{cases}$$ Eliminamos la tercera ecuación y parametrizamos y = λ

Solución: x = - λ , y = λ , z= 3-2 λ

c) (0,75 puntos) Resolverlo para a = 5

$$\begin{cases} 6x & 4y & 0 & = 0 \\ 0 & 4y & +z & = 3 \\ 4x & +10y & +z & = 3 \end{cases}$$ SCD (Cramer)

$$|A| = -20 \qquad |x| = \frac{0}{-20} = 3 \qquad |y| = \frac{0}{-20} = 0 \qquad |z| = \frac{-60}{-20}$$

Solución (x,y,z) = (0,0,3)

B.2. Calificación máxima: 2,5 puntos

Dada la función real de variable real definida sobre su dominio como $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2+x^2} & Si\ x \leq -1 \\ \frac{2x^2}{3-3x} & Si\ x > -1 \end{cases}$

Se pide:

a) (0,75 puntos) Estudiar la continuidad de la función en R

$2 + x^2 = 0$

$x^2 = -2 \quad ; x = \sqrt{-2} = No\ existe$

$3 - 3x = 0 \quad ; 3 = 3x\ ; \quad x = 1\ No\ continua$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = \dfrac{(-1)^2}{2+(-1)^2} = \dfrac{1}{3} \\ \lim\limits_{x\to -1^-} \left(\dfrac{x^2}{2+x^2}\right) = \dfrac{1}{3} \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{2x^2}{3-3x} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\} Continua\ en\ \mathbb{R} - [1]$$

b) (1 punto) Calcular el siguiente límite $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)^{2x^2-1}$

$$\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^2}{2+x^2}\right)^{2x^2-1} = 1^\infty$$

$$\lim_{e^{x\to -\infty}} \left(\frac{x^2}{2+x^2}\right)(2x^2-1) = \lim_{e^{x\to -\infty}} \left[\frac{x^2-(2+x^2)}{2+x^2}\right](2x^2-1) = \lim_{e^{x\to -\infty}} \left(\frac{-2}{2+x^2}\right)(2x^2-1) =$$

$$= \lim_{e^{x\to -\infty}} \frac{-4x^2+2}{2+x^2} = e^{-4}$$

c) (0,75 puntos) Calcular la siguiente integral $\int_{-1}^{0} f(x)dx$

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{0} \frac{x^2}{3-3x} dx = \int_{-1}^{0} \frac{2x^2}{3(1-x)} dx = \frac{2}{3} \int_{-1}^{0} \frac{x^2}{x-1} dx$$

$$\left\{\begin{array}{l} 4 = x - 1 \\ x^2 = (4+1)^2 \end{array}\right. \quad du=dx \quad \Bigg| \quad = \frac{2}{3} \int_{-1}^{0} \frac{(4+1)^2}{u} du = \frac{2}{3} \int_{-1}^{0} \frac{u^2}{u} + \frac{2u}{u} + \frac{1}{u} =$$

$$\frac{2}{3} = \int_{-1}^{0} u + 2 + \frac{1}{u} = \left[\frac{2}{3}\left(\frac{u^2}{2} + 2u + \ln(u)\right)\right]_{-1}^{0} =$$

$= \left[\frac{2}{3}\left(\frac{u^2}{2} + 2u + \ln(u)\right)\right]_{-1}^{0}$ = *Si deshacemos el cambio y aplicamos la regla de Barrow =*
4/3 u

B.3. Calificación máxima: 2,5 puntos

Dada la recta $r = \frac{x-1}{2} - \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, el plano π: x - z = 2 y el punto A (1,1,1), se pide:

a) (0,75 puntos) Estudiar la posición relativa de r y π y calcular su intersección, si existe.

b) (0,75 puntos) Calcular la proyección ortogonal del punto A sobre el plano π.

c) (1 punto) Calcular el punto simétrico del punto A con respecto a la recta r.

<u>Solución</u>:

a) Pasamos la recta a ecuación general

$$\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ -2x - 2z = 0 \end{cases} \quad y\ si\ formamos\ un\ sistema\ con\ el\ plano\ x - z = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\ La\ matriz\ tiene\ rango\ 3, por\ lo\ tanto\ son\ secantes.$$

Para calcular la intersección ponemos la recta en paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases} \quad y\ sustituimos\ en\ el\ plano\ x - z = 2$$

$$Por\ lo\ que\ tendremos\ 1 + 2\lambda - (-1 - 2\lambda) = 2\ \ siendo\ \lambda = 0$$

El punto es x = 1 ; y = 0 ; z = -1

b) Calculamos una recta perpendicular al plano que pase por A:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad Realizamos\ el\ corte\ con\ el\ plano\ x - z = 2$$

De manera análoga al apartado anterior obtenemos que lambda es igual a 1 y sustituimos en la recta para obtener la proyección (2,1,0)

c) Construimos un plano auxiliar perpendicular a la recta que pase por A. El corte de este plano con la recta determina un punto. Este punto es el punto medio entre A y su simétrico.

El plano auxiliar es 2x+y-2z-1=0.

El punto de corte del plano con la recta es M (1/3,-1/3,-1/3).

El punto simétrico será A'(-1/3,-5/3,-5/3) y se obtiene obligando a que M sea el punto medio entre A y A'

B.4. Calificación máxima: 2,5 puntos

La longitud de la sardina del pacífico (*Sardinops sagax)* se puede considerar que es una variable aleatoria con distribución normal de media 175mm y desviación típica 25,75mm

a) (1 punto) Una empresa envasadora de esta variedad de sardinas solo admite como sardinas de calidad aquellas con una longitud superior a 16 cm. ¿Qué porcentaje de las sardinas capturadas por un buque pesquero serán de la calidad que espera la empresa envasadora?

b) (0,5 puntos) Hallar una longitud t < 175 mm tal que entre t y 175mm estén el 18% de las sardinas capturadas

c) (1 punto) En altamar se procesan las sardinas en lotes de 10. Posteriormente se devuelven al mar las sardinas de cada lote que son menores de 15 cm por considerarlas pequeñas. ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote haya al menos una sardina devuelta por pequeña?

Solución:

a) Nos piden la probabilidad de que la variable tenga un valor por encima de 160 mm. Por lo que:

$$p(X \geq 160) = p\left(Z \geq \frac{160-175}{25,75}\right) = p(Z \geq -0,58) = p(Z \leq 0,58) = 0,7190$$

b) Nos piden el valor de la variable para que entre la mitad de la distribución y un valor anterior a la media se encuentre un 0,18 de la probabilidad.

Por simetría de la curva podemos inferior que

$$p\left(Z \leq \frac{X_1-175}{25,75}\right) = 0,32 \;\; siendo\; X_1 < 0$$

Por lo que:

$$p\left(Z \leq \frac{X_1-175}{25,75}\right) = 0,68 \;\; siendo\; X_1 > 0$$

Buscando en la tabla nos sale que:

$$\frac{X_1-175}{25,75} = 0,465 \quad \rightarrow X_1 = 186,97\, mm.$$

Puesto que el valor está por debajo de la media, lo obtenemos por simetría 163,03 mm

c) Nos piden $p(X \leq 150) = p\left(Z \leq \frac{150-175}{25,75}\right) = p(Z \leq -0,97) = p(Z \geq 0,97) =$

$$= 1 - p(Z \leq 0,97) = 1 - 0,834 = 0,166$$

Por lo que la Binomial será B(10;0,166)

$$p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0,166^0(1-0,166)^{10} = 0,8372$$