Universidad Autónoma de Madrid	**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID** PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS Convocatoria 2022 **MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	**ESPECÍFICA**

INSTRUCCIONES Y CRITERIOS GENERALES DE CALIFICACIÓN

INSTRUCCIONES: Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utili-zar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico. **CALIFICACIÓN:** Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$$

a) Calcule, si es posible, la matriz $A \cdot B$.
b) Calcule una matriz C tal que $A \cdot C = A$.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sea S la región del plano definida por:

$$4x + y \leq 4; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0\ .$$

a) Represente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.
b) Obtenga los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = x + 2y$ en S, indicando los puntos de la región en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real $f(x) = x^3 - 3x$.
a) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -1$.
b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sean A y B sucesos de un experimento alatorio tales que

$$P(A) = 0'9 \quad P(B) = 0'4 \ \text{ y } \ P(A \cap B) = 0'3$$

Calcule:

a) $P(A \cup B)$.
b) $P(B \mid A)$.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
La distancia recorrida, medido en kilómetros (Km) que realizan en cada trayecto los vehículos de cirta empresa de Carsharing se puede aproximar por una variable aleatoria, X, con distribución normal de media μ Km y desviación típica $\sigma = 1$ Km.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 81 y se obtiene una media muestral $\overline{x} = 7$ km. Obtenga un intervalo de confianza al 95 % para μ.
b) Supongamos que $\mu = 7$ km. Calcule la probabilidad de que, al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño 49, la distancia media recorrida, $\overline{X}$, sea mayor o igual a 7'25 km.

Academia M25

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + z &= 5 \\ x + y + z &= 2 \\ 3x + 2y + 2z &= a \end{aligned}\right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.
b) Resuelva el sistema para $a = 7$.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sea $f(x)$ una función real de variable real tal que su función derivada es

$$f'(x) = 2x + 4 .$$

a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
b) Determine la función $f(x)$ sabiendo que $f(0) = 3$.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + 5} .$$

a) Determine su dominio y sus asíntotas, si las tiene.
b) Calcule su función derivada, $f'(x)$.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio. Se conoce que:

$$P(A) = 0'25 \quad P(B) = 0'75 \quad \text{y} \quad P(A \mid B) = 0'5.$$

Calcule:

a) $P(\overline{A} \mid B)$.
b) $P(A \cap B)$.
Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario de S.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

El peso en kilogramos (kg) de los melones que se venden en cierta cadena de supermercados se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal de media $\mu = 1'5$ kg y desviación típica $\sigma = 0'1$ kg.

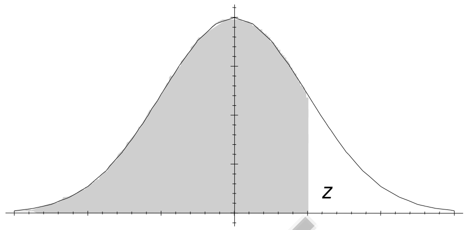
a) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25 de esas piezas de fruta. Calcule la probabilidad de que la media, $\overline{X}$ esté entre 1'48 y 1'52 kg.
b) Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño 16 la suma total de los pesos de esas piezas sea a lo sumo 23'84 kg.

Academia M25

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de *z*.



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

Academia M25

SOLUCIONES OPCIÓN A

1. *a*)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} =$$

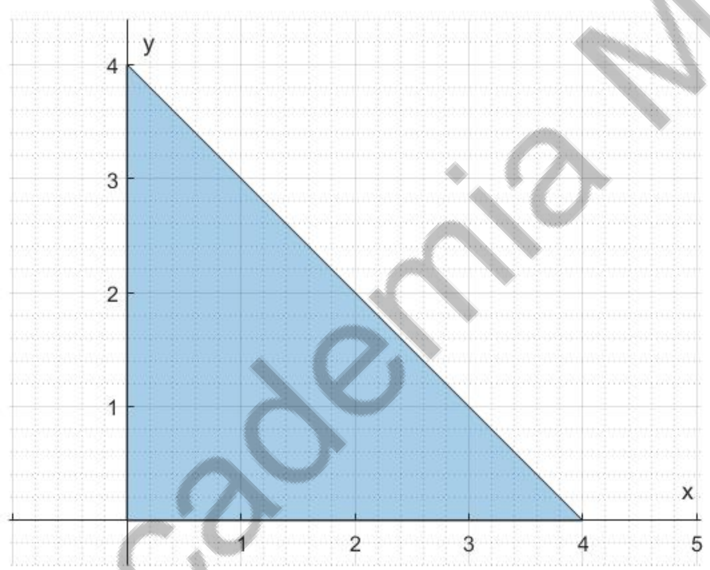
$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 7 + 1 \cdot -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Obs: El desarrollo explícito del producto no se considera necesario.

b) Queremos que $A \cdot C = A$. Como A tiene tres columnas necesitamos multiplicar por Id_3 la matriz identidad 3×3. Así:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. *a*) Dibujamos la región S y calculamos los vértices:



Con vertices $A = (0, 0)$, $B = (0, 4)$ y $C = (4, 0)$.

b) La función objetivo es $f(x, y) = x+2y$. Como la región es cerrada y acotada, evaluamos en los vértices de la región factible obtenidos:

- $f(0, 0) = 0 \rightarrow$ Mínimo
- $f(0, 4) = 8 \rightarrow$ Máximo
- $f(4, 0) = 4$

Resumiendo, el valor máximo de $f(x, y)$ en S es 8 y se da en el punto $(0, 4)$. El valor mínimo de $f(x, y)$ en S es 0 y se da en el punto $(0, 0)$.

Academia M25

3. *a*) La ecuación de la recta tangente es a $f(x)$ en $x = -1$ es:

$$y - f(-1) = f'(1)(x - (-1))$$

Así pues, como

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 = 2$$
$$f'(x) = 3x^2 - 3 \implies f'(-1) = 0$$

Tenemos que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = -1$ es:

$$y - 2 = 0(x + 1) \implies y = 2$$

Una recta horizontal.

b) La función es continua y derivable en $\mathbb{R}$ ya que es un poliomio. Para calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento igualamos la derivada a cero:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \implies x^2 = 1 \implies x = \pm 1.$$

Ahora miramos el signo de la derivada en los intervalos determinados por los puntos que acabamos de obtener:

- En $(-\infty, -1)$ vemos que $f'(x) > 0$ por lo que $f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1]$
- En $(-1, 1)$ vemos que $f'(x) < 0$ por lo que $f(x)$ es creciente en $[-1, 1]$.
- En $(1, \infty)$ vemos que $f'(x) > 0$ por lo que $f(x)$ es creciente en $[1, \infty]$

4. *a*) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0'9 + 0'4 - 0'3 = 1$

b) $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0'3}{0'9} = \dfrac{1}{3}$.

5. *a*) El intervalo de confianza al 95 % para μ viene dado por $[\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$, donde $z_{\alpha/2} = 1'96$. Por lo tanto el intervalo es:

$$[\ 6'7822;\ 7'2178].$$

b) $P[\overline{X} \geq 7'25] = 1 - P[\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{7'25-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}] = 1 - P[Z \leq \frac{0'25}{1/7}] = 1 - P[Z \leq 1'75] = 1 - 0'9599 = 0'0401$. Aquí $Z \sim N(0, 1)$

Academia M25

<u>SOLUCIONES OPCIÓN B</u>

1. *a*) La matriz del sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Cuyo rango determinante es, claramente, 0. El rango de A es dos ya que por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

La matriz ampliada es:

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & a \end{pmatrix}$$

Para calcular su rango calculamos el determinante que resulta de seleccionar las columnas correspondientes al menor de orden 2 que hemos utilizado junto con la columna de los términos independientes:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & a \end{pmatrix} = a - 7$$

Por lo tanto:

$$rang(A^*) = \begin{cases} 3 \text{ si } a \neq 7 \\ 2 \text{ si } a = 7 \end{cases}$$

Así pues:

- Si $a \neq 7$ $rang(A) = 2 \neq rang(A^*) = 3$ por lo que es un SISTEMA INCOMPATIBLE .
- Si $a = 7$, $rang(A) = 2 = rang(A^*) = 2 <$ número de variables, por lo tanto el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO.

b) Para $a = 7$ el sistema es compatible indeterminado. Como

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

El sistema es equivalente a:

$$\left.\begin{array}{rl} 2x + y + z & = 5 \\ x + y + z & = 2 \end{array}\right\} \sim_{f_1 - 2f_2} \left.\begin{array}{rl} -y - z & = 3 \\ x + y + z & = 2 \end{array}\right\}$$

Tomando, por ejemplo, z como variable libre en la primera ecuación tenemos que $y = -3 - z$ y ahora sustituyendo en la segunda ecuación:

$$x - 3 - z + z = 2 \implies x = 5$$

Por lo tanto todas las soluciones del sistema son:

$$(5, -3 - z, z)$$

2. *a*) La función $f(x)$ tiene derivada continua en $\mathbb{R}$ que es su dominio. Calculamos los puntos donde ésta se anula:

$$2x + 4 = 0 \implies x = -2$$

Ahora miramos el signo:

- En $(-\infty, -2)$ $f'(x) < 0$ por lo tanto $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2]$.
- En $(-2, \infty)$ $f'(x) > 0$ por lo que $f(x)$ es creciente en $[-2, \infty)$.

Academia M25

b) Calculamos las primitivas de $f'(x)$:

$$\int (2x+4)dx = x^2+4x+C$$

Como sabemos que $f(0)=3$ la función será $f(x)=x^2+4x+3$.

3. a) La función es una división de polinomios por lo tanto su dominio es $\mathbb{R}-\{x\in\mathbb{R}; x^2+5=0\}$. Pero como $x^2+5\neq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$ el dominio de $f(x)=\mathbb{R}$.
Por el argumento anterior, $f(x)$ no tiene asíntotas verticales ya que para ello necesitamos que $x^2+5=0$ y nunca pasa esto.
Finalmente $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$, así pues $y=0$ es asíntota horizontal de $f(x)$ para $x\to\pm\infty$.

   b) $f'(x)=\dfrac{(2)(x^2+5)-(2x+1)2x}{(x^2+5)^2}$

4. a) $P(\overline{A}|B)=(1-P(A|B))=0'5$.

   b) $P(A\cap B)=(P(A|B)P(B))=(0'5\cdot 0'75)=0'375$.

5. a)

$$P[1'48\leq\overline{X}\leq 1'52]=P[\overline{X}\leq 1'52]-P[\overline{X}\leq 1'48]=P[\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\leq\frac{1'52-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}]-P[\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\leq\frac{1'48-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}]=$$

$$=P[Z\leq 1]-P[Z\leq -1]=P[Z\leq 1]-P[Z\geq 1]=P[Z\leq 1]-(1-P[Z\leq 1])=2P[Z\leq 1]-1=2\cdot 0'8413-1=0'6826$$

   b) Nos piden que la suma de los 16 pesos sea a lo sumo 23'84 kg, lo que quiere decir que la media $\overline{X}\leq\frac{23'84}{16}=1'49$. Entonces:

$$P[\overline{X}\leq 1'49]=P[\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\leq\frac{1'49-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}]=P[Z\leq\frac{-0'01}{0'1/4}]=P[Z\leq -0'4]=1-P[Z\leq 0'4]=1-0'6554=0'3466$$

Aquí $Z\sim N(0,1)$.

Academia M25

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

ATENCIÓN: La calificación debe hacerse en múltiplos de 0,25 puntos

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Cálculo correcto del producto……...1,00 punto.
Apartado (b): 1 punto.
Determinación correcta de la matriz C……………..….................................1,00 punto.
Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Representación correcta de la región S……..0,50 puntos.
Determinación correcta de los vértices…..0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Determinación correcta de las coordenadas del máximo y mínimo...............0,50 puntos.
Determinación correcta del valor máximo y mínimo…………………………..0,50 puntos.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Expresión correcta de la ecuación de la tangente..0,25 puntos.
Cálculo correcto de la derivada………...0,50 puntos.
Ecuación correcta de la tangente………... 0,25 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Determinación de los valores críticos………………………….......................0,25 puntos.
Determinación de los intervalos pedidos   ……...0,75 puntos.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Planteamiento correcto..0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad pedida...0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Planteamiento correcto..0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad pedida...0,50 puntos.

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ ………..0,25 puntos.
Fórmula del intervalo de confianza……………………….............................0,25 puntos.
Calculo correcto del intervalo …..……………………….................................0,50 puntos.

Apartado (a): 1 punto.
Planteamiento correcto……………………………….........................0,25 puntos.
Planteamiento de la probabilidad ....0,25 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad ....0,50 puntos.

NOTA: La resolución de ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.

Academia M25

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Cálculo correcto del determinante y valor crítico ……............................... 0,50 puntos.
Discusión correcta.. 0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Solución correcta del sistema...1,00 punto.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Determinación del valor crítico ..………………………….................... 0,25 puntos.
Determinación de los intervalos ...……………………………………… 0,75 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Cálculo correcto de la primitiva...0,75 puntos.
Determinación de la constante..0,25 puntos.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Determinación correcta del dominio ....0,25 puntos.
Justificación de no existencia de AV ....0,25 puntos.
Calculo correcto de las AH ……………………..……………………………0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.
Cálculo correcto de la derivada …………..1 punto.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Planteamiento correcto..0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad pedida..0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Planteamiento correcto..0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad pedida..0,50 puntos.

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Planteamiento correcto…………………………………..........................0,25 puntos.
Planteamiento de la probabilidad ....0,25 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad ....0,50 puntos.
Apartado (a): 1 punto.
Planteamiento correcto…………………………………..........................0,25 puntos.
Planteamiento de la probabilidad ....0,25 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad ....0,50 puntos.

NOTA: La resolución de ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.

Academia M25