UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS

Curso **2020–2021**

MATERIA: MATEMÁTICAS

INSTRUCCIONES Y CRITERIOS GENERALES DE CALIFICACIÓN

El alumno contestará a una de las dos opciones que se le ofrecen (A o B) y solo a una. Debe dar respuestas concisas y justificar los argumentos empleados.

CALIFICACIÓN: La puntuación de cada ejercicio, así como la de cada apartado, se indican en el encabezamiento de los mismos.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN **A**

Ejercicio 1. (2.5 ptos.)

a) **1.25 ptos.** Estudiar la solubilidad del siguiente sistema de ecuaciones según los valores de K:

$$\begin{cases} x - y + z &= -3, \\ 2x + z &= -2, \\ -x + Kz &= -4. \end{cases}$$

b) **1.25 ptos.** Obtener la solución para el caso de $K = -3$.

Ejercicio 2. (2.5 ptos.)

a) **1.25 ptos.** Calcular la recta que pasa por el punto $P = (2, -1, 3)$ y es perpendicular al plano

$$\pi : \quad \begin{cases} x &= 1 - \lambda - \mu, \\ y &= \lambda + 2\mu, \\ z &= -2 + \mu, \end{cases}$$

b) **1.25 ptos.** Obtener la ecuación del plano perpendicular al anterior y que incluye a la recta:

$$r : \quad \frac{x+2}{2} = y - 1 = -z + 3.$$

Ejercicio 3. (2.5 ptos.)

a) **1.25 ptos.** Hallar los valores de A para los que la función $f(x)$ es continua y derivable en toda la recta, siendo:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + A}.$$

b) **1.25 ptos.** Tomando $A = 2$ en la función anterior, obtener los máximos y mínimos locales, si los hay.

Ejercicio 4. (2.5 ptos.)

a) **1.5 ptos.** Hallar todas las asíntotas de la función $g(x) = \dfrac{x-2}{x^2+x}$.

b) **1 pto.** Calcular la recta tangente a la gráfica de $g(x)$ en el punto de abscisa $x_0 = 1$.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (2.5 ptos.)

a) **1.25 ptos.** Calcular el producto de matrices $A \cdot B \cdot C^T$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & K & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) **1.25 ptos.** Hallar el rango de la matriz AB según los distintos valores de K.

Ejercicio 2. (2.5 ptos.)

a) **1 pto.** Calcular el plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s, donde:

$$r: \ -x = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{3}, \qquad s: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda, \\ y = -3 - \lambda, \\ z = -1. \end{cases}$$

b) **1.5 ptos.** Hallar la distancia desde dicho plano a la recta s.

Ejercicio 3. (2.5 ptos.)

a) **1.5 ptos.** Encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos locales de la función:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1\,.$$

b) **1 pto.** Obtener los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad de dicha función.

Ejercicio 4. (2.5 ptos.)

a) **1 pto.** Calcular la primitiva:

$$\int \frac{-x}{x^2-4}\, dx.$$

b) **1.5 ptos.** Hallar el área encerrada entre el eje X y la curva $f(x)$ entre las abscisas $x = 0$ y $x = \pi$, donde: $f(x) = 2x\,\mathrm{sen}(x)$.

	UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS Curso **2020–2021** **RESOLUCIÓN** **MATERIA:** MATEMÁTICAS	

La resolución de cada ejercicio no es necesariamente única. La siguiente solo es una posible manera de resolver las cuestiones planteadas. A la hora de corregir se debe valorar cualquier procedimiento bien argumentado.

OPCIÓN **A**

Ejercicio 1. (2.5 ptos.)

a) Podemos utilizar varios métodos. Por el método de Gauss, escribimos el sistema en forma matricial y obtenemos los siguientes sistemas equivalentes:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & K & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & K+1 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1/2 & 2 \\ 0 & 0 & K+\frac{1}{2} & -5 \end{array}\right).$$

La matriz ampliada tiene rango 3, pero para $K = -\frac{1}{2}$ la matriz del sistema tiene rango 2, luego, por el teorema de Rouché el sistema es incompatible si $K = -\frac{1}{2}$ y es compatible determinado si $K \neq -\frac{1}{2}$, pues en ese caso el rango coincide en las dos matrices y es además igual al número de incógnitas.

b) Obtenemos ahora la solución para $K = -3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1/2 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

luego la solución es $(x, y, z) = (-2, 3, 2)$.

Ejercicio 2. (2.5 ptos.)

a) El vector de dirección de la recta es el producto vectorial de los dos vectores de dirección del plano:

$$(-1, 1, 0) \times (-1, 2, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1, 1, -1).$$

Luego la recta es:

$$x - 2 = y + 1 = \frac{z-3}{-1}.$$

b) Los vectores de dirección del plano son el vector normal al plano anterior, $(1, 1, -1)$, y el vector de dirección de la recta r, $(2, 1, -1)$, y pasa por el punto $(-2, 1, 3)$, por tanto la ecuación del plano es:

$$\pi : \begin{cases} x = -2 + \lambda + 2\mu, \\ y = 1 + \lambda + \mu, \\ z = 3 - \lambda - \mu. \end{cases}$$

Ejercicio 3. (2.5 ptos.)

a) La función será continua y derivable en toda la recta si el denominador no se anula nunca. Calculemos cuándo vale cero el denominador:

$$x^2 + 2x + A = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4A}}{2}.$$

Para que no haya raíces debe ser $4 - 4A < 0 \iff 1 < A$. Por tanto, si $A > 1$ la función es continua y derivable en toda la recta.

b) Calculamos la derivada de f sustituyendo el valor $A = 2$ y obtenemos los puntos críticos:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \Longrightarrow f'(x) = \frac{-2x - 2}{(x^2 + 2x + 2)^2} = 0 \Longrightarrow x = -1.$$

Como la función es derivable en toda la recta, este punto es el único candidato a máximo o mínimo local. La derivada es positiva si $x < -1$ y es negativa si $x > -1$, luego ese punto es un máximo local (y absoluto). Además, $f(-1) = 1$.

Ejercicio 4. (2.5 ptos.)

a) Buscamos las asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{x^2+x} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x-2}{x^2+x} = 0,$$

luego $y = 0$ es asíntota horizontal para $x \to \infty$ y para $x \to -\infty$. No puede haber asíntotas oblicuas porque ya hay asíntota horizontal por los dos lados. Las asíntotas verticales sólo pueden aparecer cuando el denominador, $x(x+1)$, se anula, es decir, en $x = 0$ y en $x = -1$. Calculamos los límites:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x-2}{x(x+1)} = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{x-2}{x(x+1)} = \infty, \qquad \lim_{x\to -1^+} \frac{x-2}{x(x+1)} = \infty, \quad \lim_{x\to -1^-} \frac{x-2}{x(x+1)} = -\infty.$$

Por tanto, $x = -1$ y $x = 0$ son las dos asíntotas verticales.

b) La fórmula para la recta tangente es:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Calculamos lo que necesitamos:

$$f(1) = -\frac{1}{2}, \qquad f'(x) = \frac{x^2 + x - (2x+1)(x-2)}{(x^2+x)^2} = \frac{-x^2 + 4x + 2}{(x^2+x)^2}, \qquad f'(1) = \frac{5}{4},$$

y la recta tangente resultante es:

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{5}{4}(x - 1).$$

OPCIÓN **B**

Ejercicio 1. (2.5 ptos.)

a) Multiplicamos las matrices. Observamos que C^T es la traspuesta de C:

$$\begin{aligned} A\cdot B\cdot C^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & K & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -2 & K-2 & -K \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2-K & -K \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Calculamos el determinante del producto $A \cdot B$ y estudiamos cuándo es cero:

$$\det(A\cdot B) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -2 & K-2 & -K \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -16K - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad K = -\frac{1}{8}.$$

Entonces, si $K \neq -\dfrac{1}{8}$ el rango de $A \cdot B$ es tres y si $K = -\dfrac{1}{8}$ el rango es dos, porque hay dos filas independientes.

Ejercicio 2. (2.5 ptos.)

a) La ecuación del plano es

$$\pi : \begin{cases} x = -\mu + 2\lambda, \\ y = -2 + 2\mu - \lambda, \\ z = 1 + 3\mu. \end{cases}$$

b) La recta s es paralela al plano π, luego la distancia será la distancia desde cualquier punto de s a π, pero necesitamos la ecuación continua del plano. Para ello calculamos el vector normal:

$$\vec{n} = (-1,2,3) \times (2,-1,0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (3,6,-3).$$

La ecuación continua y la distancia pedida son:

$$\pi :\ 3(x) + 6(y+2) - 3(z-1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x + 2y - z + 5 = 0.$$

$$\text{dist}(\pi, s) = \text{dist}(\pi, (2,-3,-1)) = \frac{|2 + 2(-3) - (-1) + 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}\ .$$

Ejercicio 3. (2.5 ptos.)

a) Calculamos los puntos donde se anula la derivada de la función:

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x = 3, \\ x = -1. \end{cases}$$

Esos dos valores son puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada en los intervalos que definen:

$$f'(x) > 0 \quad \text{en} \quad (-\infty, -1) \cup (3, \infty),$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{en} \quad (-1, 3),$$

Por tanto, f es creciente en $(-\infty,-1) \cup (3,\infty)$ y decreciente en $(-1,3)$. El punto $x = -1$ es un punto máximo local, con valor $f(-1) = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$. El punto $x = 3$ es un punto mínimo local, con valor $f(3) = -8$.

b) Utilizamos la segunda derivada:

$$f''(x) = 2x - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1.$$

En ese punto la segunda derivada cambia de signo, luego es un punto de inflexión. En $(-\infty, 1)$, $f''(x)$ es negativa, luego allí f es cóncava (como $-x^2$). En $(1, \infty)$, $f''(x)$ es positiva, luego allí f es convexa (como x^2).

Observación: En muchos centros de secundaria los términos convexa y cóncava se utilizan al revés. Téngase esto en cuenta.

Ejercicio 4. (2.5 ptos.)

a) El numerador es casi la derivada del denominador:

$$\int \frac{-x}{x^2 - 4}\, dx = -\frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 4}\, dx = -\frac{1}{2} \ln |x^2 - 4| + C.$$

donde C es una constante de integración.

b) Observamos que $2x \operatorname{sen}(x) \geq 0$ en el intervalo $[0, \pi]$, luego el área pedida es:

$$\int_0^\pi 2x \operatorname{sen}(x)\, dx\ ,$$

que calculamos integrando por partes:

$$\begin{cases} u = 2x, & du = 2\, dx, \\ dv = \operatorname{sen}(x)\, dx, & v = -\cos(x), \end{cases}$$

$$\int_0^\pi 2x \operatorname{sen}(x)\, dx = \Big[-2x\cos(x) \Big]_0^\pi + \int_0^\pi 2\cos(x)\, dx = \Big[-2x\cos(x) + 2\sin(x) \Big]_0^\pi = 2\pi.$$

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

Los siguientes criterios son solo una guía y en cualquier caso deberán adaptarse al método concreto de resolución presentado.

OPCIÓN **A**

Ejercicio 1. (2.5 ptos.)

a) 0.75 ptos. por el planteamiento y 0.5 ptos. por la resolución correcta.

b) 0.75 ptos. por el planteamiento y 0.5 ptos. por el cálculo.

Ejercicio 2. (2.5 ptos.)

a) 0.75 ptos. por el planteamiento y 0.5 ptos. por la recta correcta.

b) 0.75 ptos. por el planteamiento y 0.5 ptos. por el plano correcto.

Ejercicio 3. (2.5 ptos.)

a) 0.75 ptos. por el planteamiento 0.5 ptos. por los valores de la constante.

b) 0.5 ptos. por la derivada, 0.25 ptos. por el punto crítico, $0,5$ por clasificar el punto crítico.

Ejercicio 4. (2.5 ptos.)

a) 0.4 ptos. por cada asíntota, 0.1 ptos. por estudiar cada segundo límite de las asíntotas.

b) 0.25 ptos. por la derivada, 0.75 ptos. por la ecuación correcta de la recta.

OPCIÓN **B**

Ejercicio 1. (2.5 ptos.)

a) 0.25 ptos. por la traspuesta, 0.75 ptos. por el primer producto y 0.25 por el segundo.

b) 0.75 ptos. por el planteamiento y 0.5 ptos. por la solución correcta.

Ejercicio 2. (2.5 ptos.)

a) 0.5 ptos. por el planteamiento y 0.5 ptos. por la ecuación correcta.

b) 0.25 ptos. por el planteamiento, 0.5 ptos. por la ecuación continua del plano, 0.5 ptos. por la fórmula de la distancia y 0.25 ptos. por el cálculo final.

Ejercicio 3. (2.5 ptos.)

a) 0.5 ptos. por la derivada, 0.5 ptos. por los intervalos de crecimiento y decrecimiento y 0.5 ptos. por clasificar el punto crítico.

b) 0.25 ptos. por la segunda derivada, 0.5 ptos. por los intervalos de concavidad y convexidad y 0.25 ptos. por el punto de inflexión.

Ejercicio 4. (2.5 ptos.)

a) 0.75 ptos. por el logaritmo, aunque no lleve el valor absoluto, y 0.25 ptos. por el valor final.

b) 0.5 ptos. por el planteamiento, 0.5 ptos. por la integración por partes y 0.5 ptos. por el valor final correcto.