| | **UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**<br>PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD<br>PARA MAYORES DE 25 AÑOS<br>**AÑO 2021**<br>**MATERIA**: MATEMÁTICAS II | |
|---|---|---|

**INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN**

INSTRUCCIONES : El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni simbólicas. **Las respuestas deben estar debidamente justificadas**.
PUNTUACIÓN: La puntuación total es de 10 puntos distribuidos conforme se indica en el enunciado de cada ejercicio.
TIEMPO: 1 hora y 30 minutos.

## OPCIÓN A

**Ejercicio 1**. (2.5 puntos)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Se pide:

a) (1 punto) Calcular la matriz inversa de $A$.
b) (0.75 puntos) Calcular el determinante de la matriz $2A^tB$, donde $A^t$ es la matriz transpuesta de $A$.
c) (0.75 puntos) Calcular el determinante de la matriz $(A^{-1}B)^7$.

**Ejercicio 2**. (2.5 puntos)

Dados los puntos $A(1,-1,2)$, $B(3,-2,3)$ y $C(2,1,2)$, se pide:

a) (0.5 puntos) Determinar las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{AC}$.
b) (1 punto) Comprobar que el triángulo de vértices $A$, $B$ y $C$ es rectángulo.
a) (1 punto) Comprobar que el triángulo de vértices $A$, $B$ y $C$ no es isósceles e identificar el lado menor.

**Ejercicio 3**. (2.5 puntos)

Dada la función $f(x) = -3 + \frac{4}{x-2} - \frac{4}{x+1}$ se pide:

a) (1.25 puntos) Determinar el dominio de definición de $f(x)$ y sus asíntotas.
b) (1.25 puntos) Calcular $f'(x)$ y comprobar que $f(x)$ tiene un extremo relativo en $x = \frac{1}{2}$. ¿Se trata de un máximo o de un mínimo?

**Ejercicio 4**. (2.5 puntos)

Dos expertos en valoración de siniestros, A y B, realizan peritaciones para una compañia de seguros. El experto A realiza el triple de peritaciones que el experto B. En los casos en que interviene A la probabilidad de que el asunto se resuelva con una indemnización es 0.8, mientras que si interviene B la probabilidad de indemnización es 0.9. Se pide:

a) (1.25 puntos) ¿Qué porcentaje de siniestros termina en indemnización?
b) (1.25 puntos) Si un siniestro se ha resuelto con el pago de una indemnización, ¿qué probabilidad hay de que la peritación haya sido realizada por B?

## OPCIÓN B

**Ejercicio 1**. (2.5 puntos)

Dado el sistema de ecuaciones, $\begin{cases} x & +4y & & = 2 \\ 3x & +2y & +mz & = 6 \\ 2x & -2y & +6z & = -2, \end{cases}$

se pide:

a) (1.5 puntos) Discutir la compatibilidad del sistema en función de los valores del parámetro $m$.

b) (1 punto) Resolver el sistema cuando $m = 0$.

**Ejercicio 2**. (2.5 puntos)

Se consideran los planos $\pi_1 \equiv x - y + z = 3$ y $\pi_2 \equiv -2x + y + 2z = 2$, y el punto $P(9, -2, -7)$. Se pide:

a) (1 punto) Determinar el vector de dirección de la recta intersección de los dos planos.

b) (1.5 puntos) Al proyectar el punto $P$ sobre el plano $\pi_2$, ¿en qué punto se atraviesa al plano $\pi_1$?

**Ejercicio 3**. (2.5 puntos)

En una región remota se ha producido una epidemia contagiosa pero de fácil curación aunque lenta. Un modelo matemático estima que el porcentaje de personas que están enfermas en función de los días transcurridos desde la aparición de la epidemia viene dado por

$$P(t) = \frac{80t}{25+t^2},$$ (t son los días transcurridos, P es el porcentaje de enfermos).

Se pide:

a) (0.5 puntos) ¿Qué porcentaje de población se estima que está enferma a los 4 dias de declararse la epidemia?

b) (1 punto) ¿A los cuantos días el porcentaje de personas enfermas es máximo? ¿Cuál es ese porcentaje?

c) (1 punto) ¿Cuántos días tienen que pasar para que la cantidad de personas enfermas descienda al 2%?

**Ejercicio 4**. (2.5 puntos)

En una atracción de feria se consigue un osito derribando un bote con una pelota de goma. Cada jugador dispone de tres intentos, de modo que puede ganar en el primero, segundo o tercer lanzamiento.

a) (1.25 puntos) ¿Qué probabilidad tiene de conseguir el osito un jugador que en cada lanzamiento tiene una probabilidad de acertar igual a 0.4?

b) (1.25 puntos) Sabiendo que el jugador del apartado anterior ha conseguido el osito, ¿Cuál es la probabilidad de que no haya necesitado el tercer intento?

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN
MATEMÁTICAS II

Opción A

**Ejercicio 1.** (Puntuación máxima 2.5 puntos)
a) Planteamiento: 0.5. Resolución: 0.5
b) Planteamiento: 0.5. Resolución: 0.25
c) Planteamiento: 0.5. Resolución: 0.25

**Ejercicio 2.** (Puntuación máxima 2.5 puntos)
d) Valorar adecuadamente cualquier respuesta no completa.
e) Planteamiento: 0.5. Resolución: 0.5
f) Planteamiento: 0.5. Resolución: 0.5

**Ejercicio 3.** (Puntuación máxima 2’5 puntos)
a) Dominio 0.25. Cada asíntota 0,25. Decir que no tiene oblicua 0,25
b) Derivada: 0.5. Resto: Planteamiento 0.5 y resolución 0.25

**Ejercicio 4.** (Puntuación máxima 2’5 puntos)
a) Planeamiento 0.75. Resolución 0.25
b) Planeamiento 0.75. Resolución 0.25

Opción B

**Ejercicio 1.** (Puntuación máxima 2.5 puntos)
Un punto y medio para el primer apartado y un punto para el segundo.
En el primer apartado se obtendrá la calificación máxima si los resultados son correctos, al margen del método utilizado, ya sea por triangulación de Gauss (sin usar el concepto de rango) o ya sea estudiando el rango de las matrices.
En el segundo apartado sirve cualquier método, que conduzca a la solución.

**Ejercicio 2.** (Puntuación máxima 2.5 puntos)
a) Planteamiento: 0.5. Resolución: 0.5
b) Planteamiento: 0.75. Resolución: 0.75

**Ejercicio 3.** (Puntuación máxima 2.5 puntos)
a) Primer apartado 0.5 puntos.
b) Cálculo de la derivada 0.25. Condición necesaria de extremo y resolución 0.5. Justificación de máximo 0.25
c) Planteamiento 0.5. Resolución 0.5-

**Ejercicio 4.** (Puntuación máxima 2.5 puntos)
a) Planteamiento: 0.75. Resolución: 0.5
b) Planteamiento: 0.75. Resolución: 0.5.

Opción A

① a) La matriz inversa de $A$ es $A^{-1} = \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

b)

$$|2A^tB| = 4|A||B| = 4(-4)(-2) = 32.$$

c)

$$|(A^{-1}B)^7| = \left(\frac{-1}{4}(-2)\right)^7 = \frac{1}{128}.$$

---

② a) El punto medio del segmento $\overline{AC}$ es $M = \left(\frac{1+2}{2}, \frac{-1+1}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = (3/2, 0, 2)$

b) $\overrightarrow{AB} = (2,-1,1)$, $\overrightarrow{AC} = (1,2,0)$, $\overrightarrow{BC} = (-1,3,-1)$.
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (2,-1,-2) \cdot (1,2,0) = 0$. Luego los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ son ortogonales. El ángulo recto corresponde al vértice $A$.

c) $|\overrightarrow{AB}| = |(2,-1,1)| = \sqrt{6}$, $|\overrightarrow{AC}| = |(1,2,0)| = \sqrt{5}$. El lado mas pequeño es el cateto $\overline{AC}$.

---

③

$$f(x) = -3 + \frac{4}{x-2} - \frac{4}{x+1};$$

a) Dominio: $D = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$. Asíntotas verticales: $x = -1$; $x = 2$. Asíntota horizontal: $y = -3$.

b)

$$f'(x) = \frac{-4}{(x-2)^2} + \frac{4}{(x+1)^2};\ f'(1/2) = \frac{-4}{9/4} + \frac{4}{9/4} = 0.$$

$$f''(x) = \frac{8}{(x-2)^3} - \frac{8}{(x+1)^3};\ \ f''(1/2) = -\frac{64}{27} - \frac{64}{27} < 0;$$

Para $x = 1/2$ hay un máximo relativo.

---

④ $A \equiv$ peritaje del experto $A$,

$B \equiv$ peritaje del experto $B$,

$I \equiv$ Indemnización ,

$$P(A) = 0.75, \quad P(B) = 0.25$$
$$P(I|A) = 0.8 \quad P(I|B) = 0.9$$

a)

$$P(I) = 0.8 \cdot 0.75 + 0.9 \cdot 0.25 = 0.825 \text{ que equivale a } 82.5\%$$

b)

$$P(B|I) = \frac{P(I|B) \cdot P(B)}{P(I)} = \frac{0.9 \cdot 0.25}{0.825} = \frac{3}{11} = 0.2727$$

Opción B

① a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & m & 6 \\ 2 & -2 & 6 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & -10 & m & 0 \\ 0 & -10 & 6 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & -10 & m & 0 \\ 0 & 0 & 6-m & -6 \end{array}\right)$$

Si $m = 6$ se trata de un sistema incompatible. En otro caso es compatible determinado.

b) Si $m = 0$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & -0 & 6 & -6 \end{array}\right) \Rightarrow z = -1, \ y = 0, \ x = 2.$$

---

② a) El vector de dirección es:

$$(1, -1, 1) \times B(-2, 1, 2) = (-3, -4, -1)$$

b) El punto pedido es la intersección del plano $\pi_1$ y la recta perpendicular a $\pi_2$ que pasa por $P$. Ecuación de la recta:

$$\left.\begin{array}{l} x = 9 - 2\lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = -7 + 2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 9 - 2\lambda - (-2 + \lambda) + (-7 + 2\lambda) = 3; \ -\lambda + 4 = 3; \ \lambda = 1; \ \boxed{Q(7, -1, -5)}$$

---

③ a)

$$P(4) = \frac{320}{41} = 7.80\%$$

b)

$$P'(t) = \frac{80(25 + t^2) - 160t^2}{(25 + t^2)^2} = \frac{2000 - 80t^2}{(25 + t^2)^2}; \ P' = 0 \Rightarrow t = 5; \ P(5) = 8\%$$

c)

$$\frac{80t}{(25 + t^2)^2} = 2, \ t = 40 + 5\sqrt{60} = 78.79 \text{ dias}$$

---

④ a) La probabilidad de no acertar ningún lanzamiento es $p = 0.6^3 = 0.216$. Luego la probabilidad de ganar el premio es $0.794$

b) La probabilidad de haber acertado en el primer o segundo segundo lanzamiento sabiendo que ha ganado el premio es

$$p = \frac{0.4 + 0.6 \cdot 0.4}{0.794} = \frac{0.64}{0.794} = 0.806$$

---