

## INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

**Instrucciones:** El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones que se le ofrecen (A o B) y sólo a una. Debe dar respuestas concisas y justificar los argumentos empleados.

**Valoración:** La puntuación de cada ejercicio, así como la de cada apartado, se indica en el encabezamiento de los mismos.

**Tiempo:** 90 minutos.

### OPCIÓN A

**Ejercicio 1 (3 ptos.)** Una ganadería desea proporcionar a su ganado un mínimo de 24 unidades del pienso A y un mínimo de 25 unidades del pienso B. En el mercado se comercializan dos tipos de compuestos  $C_1$  y  $C_2$ , elaborados con ambos piensos. El paquete de  $C_1$  contiene 1 unidad de A y 5 de B, siendo su precio de 1 euro, y el de  $C_2$  contiene 4 unidades de A y 1 de B, siendo su precio 3 euros.

¿Qué cantidades de  $C_1$  y  $C_2$  deberá emplear la ganadería para preparar su dieta con el mínimo coste?

**Ejercicio 2 (3 ptos.)** Definir el concepto de derivada de una función  $f(x)$  en un punto  $x = a$ . Comentar la interpretación gráfica de la misma y explicar su relación con los máximos relativos de la función.

**Ejercicio 3 (2 ptos.)** Una muestra aleatoria simple de 25 estudiantes responde a un test de inteligencia, obteniendo una media de 100 puntos. Se sabe por experiencia previa que la variable “inteligencia de los estudiantes” es normal con una desviación típica igual a 10, pero se desconoce su media.

- 1.5 pto.** ¿Entre qué límites se hallará la verdadera inteligencia media de todos los estudiantes, con un nivel de confianza del 99%?
- 0.5 pto.** Explicar cómo afecta al intervalo de confianza si se desea bajar la confianza al 95%, manteniendo todos los datos iguales a los del apartado anterior. No calcular de nuevo el intervalo.

**Ejercicio 4 (2 ptos.)** Se tienen dos sucesos aleatorios  $A$  y  $B$  y se conocen las probabilidades:  $P(A) = 0,4$ ;  $P(B) = 0,5$  y  $P(A \cup B) = 0,7$ .

- 1 pto.** ¿Son los sucesos  $A$  y  $B$  incompatibles? Razona la respuesta.
- 1 pto.** ¿Son los sucesos  $A$  y  $B$  independientes? Razona la respuesta.

---

## OPCIÓN B

**Ejercicio 1 (2 ptos.)** Dar un ejemplo de un sistema de 2 ecuaciones lineales con 3 incógnitas que sea incompatible y explicar por qué lo es.

**Ejercicio 2 (3 ptos.)** Determinar los valores de  $a$  y  $b$  para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x \leq 0, \\ ax + b & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

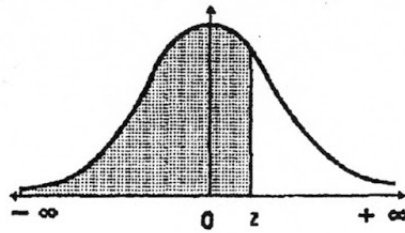
sea derivable en el punto  $x = 0$ .

**Ejercicio 3 (2 ptos.)** El tiempo de conexión a Internet de los alumnos de cierta universidad, sigue una distribución normal con desviación típica 15 minutos. Para estimar la media del tiempo de conexión, se quiere calcular el intervalo de confianza que tenga amplitud menor o igual que 6 minutos, con un nivel de confianza del 95 %. Determinar cuál es el tamaño mínimo de la muestra que es necesario observar.

**Ejercicio 4 (3 ptos.)** Se truca una moneda de forma que la probabilidad de salir cara es doble que la de salir cruz.

- a) **1 pto.** Si se tira al aire, calcula la probabilidad de cada uno de los sucesos elementales.
- b) **1 pto.** Si se tira dos veces, ¿cuánto vale la probabilidad de obtener dos caras?
- c) **1 pto.** Si se tira tres veces, calcula la probabilidad de obtener dos cruces y una cara.

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL N(0;1)



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99897	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99909	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99959	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997
4.0	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z, con distribución N(0;1), esté por debajo del valor z.

## SOLUCIÓN OPCIÓN A

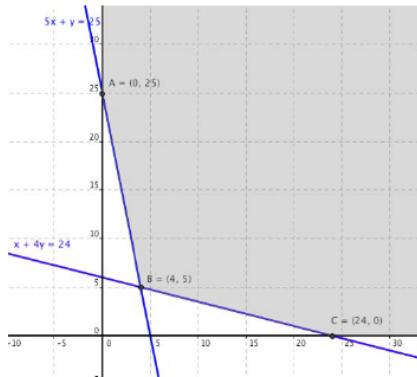
### Solución Ejercicio 1.

Mercado	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	Unidades
A	1	4	24
B	5	1	25
Cantidad	$x$	$y$	
Coste	$1 \cdot x$	$3 \cdot y$	

*Función Objetivo:*  $z = x + 3y \rightarrow$  mínima.

$$\text{Restricciones: } \begin{cases} x + 4y \geq 24 \\ 5x + y \geq 25 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Hallamos la región factible:



Se trata de una región factible no acotada, y determinamos con exactitud los vértices:

$$\begin{aligned} A: & \begin{cases} x = 0 \\ 5x + y = 25 \end{cases} \rightarrow A: (0, 25) \\ B: & \begin{cases} x + 4y = 24 \\ 5x + y = 25 \end{cases} \rightarrow B: (4, 5) \\ C: & \begin{cases} y = 0 \\ x + 4y = 24 \end{cases} \rightarrow C: (24, 0) \end{aligned}$$

Hallamos el valor que toma la función objetivo,  $z = x + 3y$  en cada uno de los vértices:

$$z_A = 0 + 3 \cdot 25 = 75$$

$$z_B = 4 + 3 \cdot 5 = 19$$

$$z_C = 24 + 3 \cdot 0 = 24$$

El óptimo, en este caso mínimo, se encuentra en el vértice  $B$ , por lo que se deben mezclar 4 paquetes de  $C_1$  y 5 paquetes de  $C_2$ , con un coste de 19 euros.

Evaluación: Poner las restricciones adecuadamente (1pto). Dibujar la región factible (1pto). Determinar la función objetivo (0.5pto). Calcular el mínimo (0.5pto).

## Solución Ejercicio 2.

Definición de derivada en un punto (1pto), interpretación gráfica (1pto). Relación con los máximos relativos (1pto).

## Solución Ejercicio 3.

### Apartado a)

El intervalo de confianza de la media poblacional es:  $\left( \bar{x} - Z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$

Para  $\bar{x} = 100$ ,  $s = 10$ ,  $n = 25$  y, para el 99 % de confianza,  $Z_{\alpha/2} = 2,58$ , se tiene:

$$\left( 100 - 2,58 \cdot \frac{10}{\sqrt{25}}, 100 + 2,58 \cdot \frac{10}{\sqrt{25}} \right) = (100 - 5,16, 100 + 5,16) = (94,84, 105,16)$$

La inteligencia media estará entre 94,84 y 105,16 puntos.

Evaluación: Poner fórmula del intervalo de confianza (0.75pto), calcularlo (0.75pto).

### Apartado b)

Al disminuir la confianza,  $z_{\alpha/2}$  disminuye también y por tanto la longitud del intervalo disminuye siendo más preciso.

Evaluación: 0.5 pto por la explicación correcta.

## Solución Ejercicio 4.

a) Dos sucesos  $A$  y  $B$  son incompatibles cuando  $P(A \cap B) = 0$ .

Como

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

En este caso:

$$P(A \cap B) = 0,4 + 0,5 - 0,7 = 0,2 \neq 0 \Rightarrow A \text{ y } B \text{ no son incompatibles.}$$

b) Dos sucesos  $A$  y  $B$  son independientes cuando  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ .

Como

$$P(A \cap B) = 0,2 \text{ y } P(A) \cdot P(B) = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2 \Rightarrow \text{los sucesos son independientes.}$$

Evaluación: Definición de suceso incompatible (0.5pto), independiente (0.5pto), verificación para cada uno de los apartados (0.5pto).

## SOLUCIÓN OPCIÓN B

### Solución Ejercicio 1.

Poner ejemplo correcto (1pto), explicar por qué el sistema es incompatible (1pto).

### Solución Ejercicio 2.

En primer lugar es necesario que sea continua. Para ello, deben coincidir los límites laterales en  $x = 0$ .

$$\text{Si } x \rightarrow 0^-, f(x) = x^2 + 2x \rightarrow 0.$$

$$\text{Si } x \rightarrow 0^+, f(x) = ax + b \rightarrow b \Rightarrow b = 0.$$

Para que sea derivable es necesario que coincidan las derivadas laterales. Salvo en  $x = 0$ , la derivada de la función es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Cuando } x \rightarrow 0^-, f'(x) = 2x + 2 \rightarrow 2.$$

$$\text{Cuando } x \rightarrow 0^+, f'(x) = a \rightarrow a \Rightarrow a = 2.$$

Por tanto, la función dada será derivable cuando  $a = 2$  y  $b = 0$ .

Evaluación: Planteamiento de la continuidad (1pto), planteamiento de la derivabilidad (1pto), calculara  $a$  y  $b$  (1pto).

### Solución Ejercicio 3.

El error admitido,  $E$ , viene dado por  $E = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , siendo  $\sigma$  la desviación típica poblacional.

En este caso, para una confianza del 95%,  $Z_{\alpha/2} = 1,96$ ,  $\sigma = 5$  y  $E < 3$ , pues la amplitud del intervalo  $2 \cdot Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ .

(Recuérdese que el intervalo de confianza es  $\left( \bar{x} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ )

Con esto:

$$2,575 \frac{0,05}{\sqrt{n}} < 0,01 \Rightarrow \sqrt{n} > 12,875 \Rightarrow n > 96,04$$

El tamaño muestral mínimo debe ser 97.

Evaluación: Planteamiento del problema identificando amplitud y no error del intervalo (1pto), obtener la ecuación para  $n$  (0.5pto), resolución correcta (0.5pto).

## Solución Ejercicio 4.

a) Sea  $C$  al suceso cara y  $X$  al suceso cruz.  
Se sabe que  $P(C) = 2 \cdot P(X)$ .

$$\text{Como } P(C) + P(X) = 1 \Rightarrow 2P(X) + P(X) = 1 \Rightarrow P(X) = \frac{1}{3} \rightarrow P(C) = \frac{2}{3}$$

a) Como los sucesos son independientes,

$$P(CC) = P(C) \cdot P(C) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

b) Por lo mismo, y como el suceso "2 cruces y 1 cara" es  $\{XXC, XCX, CXX\}$ , se tiene:

$$P(2X, 1C) = 3 \cdot P(X) \cdot P(X) \cdot P(C) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

Evaluación: 1pto cada apartado, en el que el planteamiento correcto se evaluaría en 0.5pto.