UAM Universidad Autónoma de Madrid	**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID** PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS Convocatoria 2021 **MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	ESPECÍFICA

INSTRUCCIONES Y CRITERIOS GENERALES DE CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.
CALIFICACIÓN: Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule la matriz inversa de A.
b) Calcule la matriz X que resuelve la ecuación:

$$AB^{-1}X = Id$$

donde Id denota la matriz identidad 3×3.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sea S la región del plano definida por:

$$x + y \leq 5; \quad y - x \geq 2; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0\,.$$

a) Represente la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
b) Obtenga los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 2x - y$ en S, indicando los puntos de la región en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real $f(x) = e^{x+1}$.
a) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -1$.
b) Calcule

$$\int_0^1 f(x)dx$$

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sean A y B sucesos de un experimento alatorio tales que

$$P(A) = 0'3 \; P(B) = 0'2 \;\text{ y } P(\overline{A \cup B}) = 0'6$$

Calcule:

a) $P(A \cap B)$
b) $P(\overline{B} \mid A)$.
Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El tiempo en horas (h) que tarda el AVE directo Madrid-Barcelona se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media $\mu = 2'5$ h y desviación típica $\sigma = 0'08$h. Se toma una muestra aleatoria simple de 16 viajes. Calcule

a) La probabilidad de que la media de los tiempos de esos viajes, $\overline{X}$, sea mayor o igual a 2’51 horas.
b) La probabilidad de que la media de esos 16 viajes, $\overline{X}$, esté entre 2’49 y 2’51 horas.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{rl} x - y + 2z & = 1 \\ 2x + y + z & = 2 \\ x + 2y + az & = 1 \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.
b) Resuelva el sistema para $a = 0$.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sea $f(x)$ una función real de variable real tal que su función derivada es

$$f'(x) = x^2 + x - 2 .$$

a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
b) Calcule sus máximos y mínimos locales si los tuviese.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 2} .$$

a) Determine su dominio y sus asíntotas, si las tiene.
b) Calcule su función derivada, $f'(x)$.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio. Se conoce que:

$$P(A) = 0'7 \quad P(B) = 0'3 \quad \text{y} \quad P(A \mid B) = 0'5.$$

Calcule:

a) $P(\overline{A \cap B})$.
b) $P(\overline{A} \mid B)$.
Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario de S.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

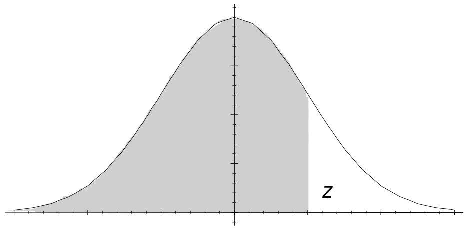
El precio actual en euros (€) del litro de gasolina 95 en las gasolineras de Madrid se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ €, y desviación típica $\sigma = 0'05$ €.

a) Con una muestra aleatoria simple del precio en 9 gasolineras la media muestral que se ha obtenido es $\overline{x} = 1'35$ €. Construya un intervalo de confianza al 95 % para μ.
b) Supongamos que $\mu = 1'35$. Determine la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño 16 la media de los precios obtenidos por litro, $\overline{X}$, sea menor o igual a 1'33 €.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de *z*.



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES OPCIÓN A

1. *a*) La inversa de la matriz A es A. Esto se ve realmente fácil usando el método de Gauss.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

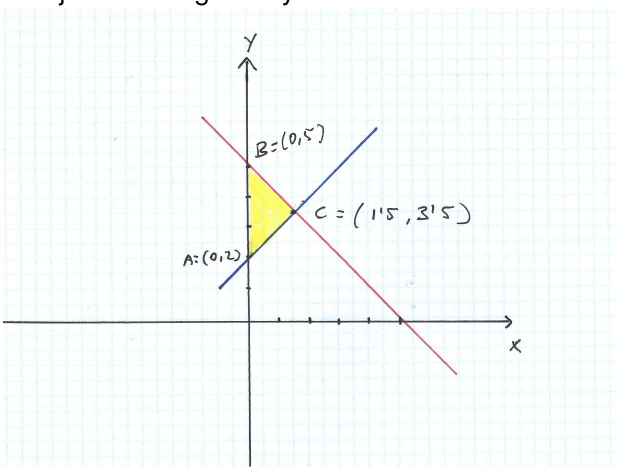
   b) Operando la ecuación

$$AB^{-1}X = Id \implies B^{-1}X = A^{-1} \implies X = BA^{-1}$$

   Así pues

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. *a*) Dibujamos la región S y calculamos los vértices:



   Con $A = (0, 2)$ y $B = (0, 5)$. El vértice C es la intersección de las rectas:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ y - x = 2 \end{cases} \longrightarrow C = (3/2, 7/2) = (1'5, 3'5)$$

   b) La función objetivo es $f(x, y) = 2x - y$. Como la región es cerrada y acotada, evaluamos en los vértices de la región factible obtenidos:

   - $f(0, 2) = -2$
   - $f(0, 5) = -5 \rightarrow$ Mínimo
   - $f(1'5, 3'5) = -0'5 \rightarrow$ Máximo

   Resumiendo, el valor máximo de $f(x, y)$ en S es $-0'5$ y se da en el punto $(1'5, 3'5)$. El valor mínimo de $f(x, y)$ en S es -5 y se da en el punto $(0, 5)$.

3. *a*) La ecuación de la recta tangente es a $f(x)$ en $x = -1$ es:

$$y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1))$$

   Así pues, como

$$f(-1) = \mathrm{e}^{-1+1} = e^0 = 1$$
$$f'(x) = \mathrm{e}^{x+1} \implies f'(-1) = 1$$

   Tenemos que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = -1$ es:

$$y - 1 = 1(x + 1) \implies y = x + 2$$

b) La primitivas de e^{x+1} son de la forma $e^{x+1} + C$, por lo tanto:

$$\int_0^1 e^{x+1}\, dx = e^{x+1}\Big]_0^1 = e^2 - e$$

4. *a*) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = P(A) + P(B) - (1 - P(\overline{A \cup B})) = 0'1$.

   b) $P(\overline{B}|A) = 1 - P(B|A) = 1 - \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

5. *a*) $P[\overline{X} \geq 2'51] = 1 - P[\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{2{,}51-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}] = 1 - P[Z \leq \frac{2{,}51-2'5}{0'08/4}] = 1 - P[Z \leq 0'5] = 1 - 0'6915 = 0'3085$

   b) $P[2'49 \leq P[\overline{X} \leq 2'51]] = P[\overline{X} \leq 2'51] - P[\overline{X} \leq 2'49] = P[Z \leq 0'5] - P[Z \leq -0'5] = = P[Z \leq 0'5] - P[Z \geq 0'5] = P[Z \leq 0'5] - (1 - P[Z \leq 0'5]) = 2P[Z \leq 0'5] - 1 = 2 \cdot 0'6915 - 1 = 0'383$

   Aquí $Z \sim N(0, 1)$.

<u>SOLUCIONES OPCIÓN B</u>

1. *a*) La matriz del sistema es:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$$
Cuyo determinante es $|A| = 3a + 3$.
Por lo tanto:
   - Si $a \neq -1$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO ya que el rango de la matriz del sistema es igual al número de variables.
   - Si $a = -1$, la matriz del sistema y la matriz ampliada son:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim_{(f_3-(f_2-f_1))} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
Asi que el rango tanto de la matriz del sistema como de la ampliada son menores que 3. De hecho, el rango de ambas es 2 ya que
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$
Por lo tanto el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO.

   b) Para $a = 0$ el sistema es compatible determinado. Resolvemos utilizando, por ejemplo, el método de Cramer $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$.

2. *a*) La función tiene derivada continua. Calculamos los puntos donde ésta se anula:
$$x^2 + x - 2 = 0 \implies x = 1 \text{ ó } x = -2$$
Ahora miramos el signo:
   - En $(-\infty, -2)$ $f'(x) > 0$ por lo tanto $f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2]$.
   - En $(-2, 1)$ $f'(x) < 0$ por lo que $f(x)$ es decreciente en $[-2, 1]$.
   - En $(1, \infty)$ $f'(x) > 0$ por lo que $f(x)$ es creciente en $[1, \infty)$.

   b) La función es derivable en $\mathbb{R}$ por lo que los candidatos a máximo o mínimo de $f(x)$ son aquellos puntos en que la derivada se anula, es decir $x = -2$ y $x = 1$.
   - En $x = -2$ la función pasa de ser creciente a decreciente por lo que $x = -2$ es un máximo local de la función.
   - En $x = 1$ la función pasa de ser decreciente a creciente por lo que $x = 1$ es un mínimo local de la función.

   Alternativamente: Sabemos que los puntos críticos de la función (derivada igual a cero) son $x = -2$ y $x = 1$. Calculamos la segunda derivada de f y sustituimos por estos valores.
$$f''(x) = 4x + 1$$
   - $f''(-2) = 4(-2) + 1 = -7 < 0$ por lo que $x = -2$ es un máximo local de $f(x)$.
   - $f''(1) = 4(1) + 1 = 5 > 0$ por lo que $x = 1$ es un mínimo local de $f(x)$.

3. *a*) La función es una división de polinomios por lo tanto su dominio es $\mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R}; x^2 + 2 = 0\}$. Pero como $x^2 + 2 \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ el dominio de $f(x) = \mathbb{R}$.
Por el argumento anterior $f(x)$ no tiene asíntotas verticales ya que para ello necesitamos que $x^2+2 = 0$ y nunca pasa esto.
Finalmente $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$, así pues $y = 1$ es asíntota horizontal de $f(x)$ para $x \to \pm\infty$.

b) $f'(x) = \dfrac{(2x+3)(x^2+2) - (x^2+3x+2)2x}{(x^2+2)^2}$

4. a) $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - (P(A|B)P(B)) = 1 - 0'3 \cdot 0'5 = 0'85$.

   b) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 0'85$.

5. a) El intervalo de confianza al 95 % para μ viene dado por $[\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$, donde $z_{\alpha/2} = 1'96$.
   Por lo tanto el intervalo es:
   $$[\,1,3173;\ 1,3827].$$

   b) $P[\overline{X} \leq 1'33] = P[\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{1'33-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}] = P[Z \leq \frac{-0'02}{0'05/4}] = P[Z \leq -1'6] = 1 - P[Z \leq 1'6] = 1 - 0,9452 = 0'0548$.
   Aquí $Z \sim N(0,1)$

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

ATENCIÓN: La calificación debe hacerse en múltiplos de 0,25 puntos

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Cálculo correcto de la inversa……...1,00 punto.
Apartado (b): 1 punto.
Despejar X ……………………...0,50 puntos.
Cálculo de X …..……..……………...0,50 puntos.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Representación correcta de la región S……..0,50 puntos.
Determinación correcta de los vértices…..0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Determinación correcta de las coordenadas del máximo y mínimo................0,50 puntos.
Determinación correcta del valor máximo y mínimo…………………………..0,50 puntos.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Expresión correcta de la ecuación de la tangente...0,25 puntos.
Cálculo correcto de la derivada………...0,50 puntos.
Ecuación correcta de la tangente……….. 0,25 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Primitiva ………………………………..0,50 puntos.
Calculo de la integral definida……………………...0,50 puntos.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Planteamiento correcto...0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad pedida..0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Planteamiento correcto...0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad pedida..0,50 puntos.

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Planteamiento correcto……………………………………...........................0,25 puntos.
Planteamiento de la probabilidad ....0,25 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad ....0,50 puntos.
Apartado (a): 1 punto.
Planteamiento correcto……………………………………...........................0,25 puntos.
Planteamiento de la probabilidad ....0,25 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad ....0,50 puntos.

NOTA: La resolución de ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Cálculo correcto del determinante y valor crítico ……............................... 0,50 puntos.
Discusión correcta... 0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Solución correcta del sistema...1,00 punto.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Determinación de los valores críticos ………………………................... 0,50 puntos.
Determinación de los intervalos ……………………………………… 0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Determinación correcta de los extremos ……………………………2 x 0,50 puntos.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Determinación correcta del dominio ....0,25 puntos.
Justificación de no existencia de AV ....0,25 puntos.
Calculo correcto de las AH ……………………..…………………………0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.
Cálculo correcto de la derivada …………...1 punto.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Planteamiento correcto...0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad pedida..0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Planteamiento correcto...0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad pedida..0,50 puntos.

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Fórmula correcta del intervalo de confianza……………… ....0,25 puntos.
Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ ………...0,25 puntos.
Determinación correcta del intervalo de confianza..0,50 puntos.
Apartado (a): 1 punto.
Planteamiento correcto…………………………………..........................0,25 puntos.
Planteamiento de la probabilidad ....0,25 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad ....0,50 puntos.

NOTA: La resolución de ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.

Las directrices, contenidos generales y orientaciones de las materias recogidas en este documento están elaborados con base en lo establecido por la normativa básica para las materias de 2º de Bachillerato, tanto en el ámbito nacional (Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, BOE de 3 enero de 2015) como en el de la Comunidad de Madrid (Resolución de 5 de junio de 2017, de la Dirección General de Universidades e Investigación, por el que se modifican las normas e instrucciones reguladoras de la prueba de acceso a la universidad para mayores de veinticinco años en el ámbito de la Comunidad de Madrid, BOCM de 16 junio de 2017).