

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACION: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación Máxima 2 puntos.

Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 - 4} \right) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 2x}$$

Ejercicio 2. Calificación Máxima 2 puntos.

Determinar el valor o los valores del parámetro a para los que el siguiente sistema es compatible determinado y resolver el sistema resultante para dicho valor o valores.

$$\begin{cases} y + 2z = -1 \\ x + y + 2z = a + 1 \\ 2x + 2y + 3z = a + 1 \end{cases}$$

Ejercicio 3. Calificación Máxima 2 puntos.

Dados los planos de ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv x - y - z - 2 = 0, \quad \pi_2 \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = \lambda + 3\mu \\ z = 2 + \lambda + \mu \end{cases}$$

- (a) Estudiar si ambos planos son paralelos o se cortan entre sí.
(b) Si r es la recta perpendicular al primero de los dos planos que pasa por el punto $(1, 1, 1)$, calcula el punto de corte de r con el primero de los dos planos.

Ejercicio 4. Calificación Máxima 2 puntos.

Dadas las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a - 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calcular los valores de a que hacen que $A \cdot B = I_2$, siendo I_2 la matriz identidad 2×2 .
(b) Calcular los valores de a que hacen que $B^2 = A$.

Ejercicio 5. Calificación Máxima 2 puntos.

Estudiar los valores de a y b que hacen que la siguiente función sea continua y derivable en todo su dominio:

$$f(x) = \begin{cases} x - a & \text{si } x \leq 1, \\ \ln(x) - \frac{b}{x} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación Máxima 2 puntos.

Si a, b son números reales tales que tanto a como b son distintos de cero, estudiar si la siguiente matriz es inversible y, en su caso, calcular su matriz inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2. Calificación Máxima 2 puntos.

Hallar la posición relativa de los planos dados por las siguientes ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv 2x - y - z + 1 = 0$$

$$\pi_2 \equiv x - 2y + z - 1 = 0$$

$$\pi_3 \equiv x + y - 2z - 1 = 0$$

Ejercicio 3. Calificación Máxima 1 punto.

Estudiar la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2xe^x + 5x^3 - 1 & \text{si } x \leq 0, \\ 2x - e^x & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 5x^4 - 3x^3 - xe^x & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Ejercicio 4. Calificación Máxima 1 punto.

Descomponer el número 124 en dos sumandos, de manera que la suma de sus raíces cuadradas sea máxima.

Ejercicio 5. Calificación Máxima 2 puntos.

Determinar el valor o valores del parámetro a para los que el sistema siguiente es compatible determinado, compatible indeterminado ó incompatible:

$$\begin{cases} x + y & = a + 1 \\ (a + 1)x + y - z & = 2 \\ x + y - az & = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 6. Calificación Máxima 2 punto.

Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{sen}^2(x - 1)}{(x - 1)^2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{\ln(x^2)}.$$